Dr. GAETANO FAZZARI
Professore Ordinario di Matematica nel R. Liceo « Umberto I » di Palermo

BREVE STORIA

DELLA

MATEMATICA

DAI TEMPI ANTICHI AL MEDIO-EVO

REMO SANDRON — EDITORE
Libraio della R. Casa
MILANO-PALERMO-NAPOLI

CAPITOLO I.

NUMERAZIONE DECIMALE.

1. I filosofi hanno lungamente discusso se l'idea di numero debbasi classificare fra le così dette idee innate, ovvero sia un prodotto dell'esperienza. Molti senz'altro affermano che, p. es. la proposizione *due e due fan quattro* è verità necessaria, nella quale l'esperienza nulla ha da vedere; altri invece sostengono che la detta proposizione esprime semplicemente una verità acquistata per primitiva e costante esperienza, ch'essa cioè è una verità induttiva. Le ricerche dei glottologi e degli etnologi han dato pienamente ragione ai secondi, poichè è provato che alla verità come quella della detta proposizione i nostri remoti antenati pervennero mercè una lenta esperienza. Ed infatti anche oggidì molte tribù selvagge sono incapaci di contare o almeno non hanno numerali superiori a due o tre o quattro o cinque, ed esprimono tutti i numeri maggiori con una parola che significa *mucchio*, *abbondanza*, *molti*. P. es. le tribù inferiori del Brasile contano per mezzo delle nocche delle dita solamente fino a tre; ogni altro numero più grande è da essi espresso con la parola *molti*. Gl' Indiani del Guarany non possono contare che fino a quattro e non hanno alcuna parola per rappresentare un qualsiasi numero superiore. Gli Abiponi possono soltanto esprimere i primi tre numeri con parole speciali e così anche i Dammara. Quando questi vogliono esprimere quattro, ricorrono alle dita, ma oltre cinque sono imbarazzatissimi. Un vocabolario Pari ci dà i numerali: *omi* = 1, *curiri* = 2, *prica* = 3 = *molti*. In un vocabolario Bota-

cudo si trova: *mokenam* = 1, *uraha* = 2 = *molti*. Altre tribù non possono contare numeri superiori a due o tre senza dire *due e uno*, *due e due*, ecc.; così nel Queensland troviamo: *ganar*=1, *burla*=2, *burla-ganar* =2+1, *burla-burla*=2+2; nel dialetto Kamilaroi: *mal* =1, *bularr* = 2, *guliba*=3, *bularr-bularr* = 2 + 2, *bula-guliba*=2+3, *guliba-guliba*=3+3; e gli abitanti del Capo York (Australia) dicono: *netat*=1, *naes*=2, *naes-netat* =2+1, *naes-naes*=2+2, *naes-naes-netat*=2+2+1, *naes-naes naes*=2+2+2. I popoli poi che possono contare al di là di cinque, fanno uso di una notazione quinaria o decimale o vigesimale, od anche di una combinazione di queste notazioni (1) e ciò pel numero delle dita delle mani e dei piedi (2).

Ed infatti le dita si prestano facilmente e bene per notare un numero piccolo di oggetti, poichè accanto ad ogni dito si può mettere uno degli oggetti; ed inoltre si prestano a fissare il totale ed anche a comunicarlo agli altri. Il selvaggio non arriva però a quest'uso delle dita prima che abbia fatto un qualche piccolo progresso nel conteggio senza di esse. Ed in vero osserviamo che in nessuno linguaggio i nomi dei primi tre o quattro numerali hanno una qualche relazione con le dita, anzi presso alcuni popoli questi nomi si riferiscono chiaramente a piccoli gruppi simmetrici di oggetti comuni. P. es. *due* è presso i Cinesi *ny* e *ceul* che significano *orecchi*, nel

---

(1) Nessun popolo ha una notazione puramente quinaria o vigesimale, quantunque sembri che il sistema adoperato in uno dei dialetti Betoya dell'America meridionale abbia per base il numero 5: vi si trova infatti *sei* = *tey-ente-tey* = 1 mano e 1; *undici* = *coya-ente-tey* = 2 mani e 1; *sedici* = *toazumba-ente-tey* = 3 mani e 1; *venti* = *caesea-ente* = 4 mani. I Mayas del Yucatan e gli Aztechi hanno poi speciali nomi e segni anche per 20, 400 e 8000.

(2) Che la ragione della scelta della base 10 per la numerazione debbasi trovare nel numero delle dita delle mani fu intuito anche da Aristotele, se il libro *Problemata* è a lui giustamente attribuito.

Thibet *paksha = ale*, presso gli Ottentoti *t'koam = mani;* ancora presso gli Abiponi *quattro* è *geyenknaté = piedi dello struzzo, cinque* è *neehalek = una pelle macchiata di cinque colori;* presso i Marchesani *quattro* è *pona = un gruppo di quattro frutta ;* ecc. Ora come il nome del gruppo *orecchi* p. es. è diventato il nome del numero *due*, così, facendo uso delle dita, il selvaggio, ch' è alquanto progredito nell' arte del conteggio, incomincia col nominare il gesto che deve fare per rappresentare quel certo numero di oggetti e poi il nome del gesto rimane ad indicare il detto numero. È perciò che in tutte le lingue nelle quali i nomi dei numerali hanno una chiara etimologia, la parola per *cinque* significa *mano* ed i nomi degli altri numerali fino a *dieci* o *venti*, secondo i casi, sono semplicemente la descrizione del conteggio con le dita delle mani e dei piedi. Nella Groenlandia, sull'Orinoco, come nell' Australia la parola *sei* significa *uno dell' altra mano; dieci = due mani ; undici = due mani e un dito del piede ; venti = un uomo.* In alcuni casi trovasi una maggiore precisione. Fra gli Eschimesi della Baia di Hudson i nomi dei numerali 8, 9 e 10 indicano rispettivamente il dito medio, l'anulare e il mignolo, e lo stesso uso degli attuali nomi delle dita è osservato ancora p. es. fra gli Algonquin Indiani dell'America del Nord, gli Abiponi e i Guarani del Sud, i Zulù dell'Africa, i Malesi delle isole asiatiche.

Possiamo adunque concludere che se un sistema quinario, decimale o vigesimale è adottato nel conteggio, ciò avviene per il numero delle dita delle mani e dei piedi ed ove questo sistema è in vigore e l' etimologia dei nomi dei numeri è oscura, la più probabile spiegazione di essi si potrà trovare connettendo questi nomi ai gesti usati per rappresentare i numeri nel conteggio colle dita.

2. Venendo ora alle lingue degli Arii, troviamo molti segni da argomentare che questi popoli hanno acquistata

l'arte del conteggio lentamente e negli stessi modi che si praticano fra' popoli selvaggi. Non vi è per *contare* una parola comune alle varie lingue ariane, ma le speciali parole significano generalmente *ordinare*, *aggruppare* (il greco ἀριθμεῖν, il latino *numerare*, il tedesco *rechnen*). Inoltre i nomi dei primi tre numerali sono aggettivi; il nome del quarto numerale è generalmente anch'esso aggettivo, ma qualche volta, come nel latino *quatuor*, è un nome indeclinabile, ed i nomi degli altri numerali da cinque a dieci sono generalmente indeclinabili ed hanno od avevano originariamente la forma di un nome neutro singolare. Ciò sembra indicare, come le tre barrette che segnano il plurale nei geroglifici Egiziani, che fu un tempo in cui *tre* era il massimo limite nel contare (1). L'uso comune poi del sistema duodecimale nelle misure di lunghezze e di capacità, fa supporre che *quattro* fu un aggiunto separato e che i numerali *tre* e *quattro* furono per qualche tempo usati insieme come limiti di gruppi che occorrevano nel conteggio. Inoltre l'uso di Χείρ e *manus* per significare *numero*, le frasi comuni ἐπὶ δακτύλων συμβάλλεσθαι, *digitis computare*, ecc. attestano il fatto del conteggio sulle dita (2).

3. Se la mano dell'uomo avesse più o meno di cinque dita, la base del sistema numerico più in uso sarebbe stata diversa da quella attuale. Se l'uomo avesse p. es, sei dita in ciascuna mano, la base del sistema

---

(1) Che *tre* abbia dovuto rappresentare una nozione di grande, di moltitudine forse si nota ancora nelle espressioni τρισάθλιος, *ter felix*, διὰ τριῶν, come già aveva osservato l'Humboldt.

(2) Boezio dice che gli antichi usavano chiamare *digiti* le unità (ed. Friedlein, pag. 395). Il ricordo poi dell' uso delle dita ha dato origine ad un simbolismo *numerico digitale*, nel quale i numeri venivano indicati alzando o piegando le dita delle mani, simbolismo che si è trovato fra gli antichi Egiziani, Babilonesi, Greci e Romani, fra gli Europei del Medio-Evo (Vegg. *De numeris libri duo, Authore, Joanne Noviomago, esposti ed illustrati dal Prof.* G. FRIZZO, Verona, 1901, pag. 44-46) e che si trova anche tuttora in quasi tutti i popoli orientali.

numerico adottata dai popoli civili sarebbe stata 12; ed il sistema duodecimale avrebbe offerto maggiori vantaggi del sistema decimale, poichè 12 ha un numero di divisori maggiore di 10. Fra' più zelanti partigiani del sistema duodecimale era Carlo XII di Svezia, il quale stava studiando il modo di sostituire nel suo Stato il sistema duodecimale al decimale, quando morì. Ma tale cambiamento non è cosa facile, poichè il sistema decimale ha radici profondissime nel conteggio dei popoli civili.

4. Dei sistemi basati sull'anatomia umana, il quinario ed il vigesimale sono frequenti nei popoli di non avanzata cultura, mentre i popoli più civili hanno preferito il sistema intermedio decimale. I popoli però non han fatto costante uso di un solo sistema numerico. Nel sistema quinario 5, 25, 125, 625, ecc. sarebbero i valori delle successive unità di ordine più elevato; ma un puro sistema quinario non è stato mai adoperato, poichè quando un tale sistema doveasi estendere a numeri alti, invariabilmente si trasformava nel sistema decimale o vigesimale. In America trovavasi più diffuso il sistema quinario o meglio il quinario-vigesimale. Era universalmente usato fra le tribù degli Eschimesi delle regioni artiche; prevaleva fra le tribù indiane dell' America del Nord e fra le tribù degl' indigeni dell'America del Sud. Era anche usato da molte tribù dell' Africa e del Nord della Siberia. Tracce di esso si trovano ancora nel linguaggio dei popoli che usarono il sistema decimale, p. es. nel verbo πεμπάζειν, *contare per cinque,* usato da Omero (*Odissea*, IV, 414), e nella stessa notazione numerica dei Romani (1). Inoltre

(1) Secondo vari scrittori il simbolo V (= 5) con la sua figura rappresenta la mano levata ed aperta, che conta 5 dita, ed il simbolo X (= 10) sarebbe la combinazione di due simboli V. Ciò potrebbe attestare che presso i Romani la numerazione scritta risenta del sistema quinario. Secondo il *Noviomago* (il cui nome era GIOVANNI BRONCHORST,

nella numerazione parlata dei Greci, mentre per *trenta*, *quaranta*..., *novanta*, usavansi le parole τρίακοντα, τεσσαράκοντα..., ἐνενήκοντα, per *venti* usavasi la parola speciale εἴκοσι invece di δυάκοντα, il che potrebbe far supporre una qualche traccia di un sistema vigesimale misto al decimale. Ma il sistema vigesimale è meno comune del quinario, e come questo non si riscontra mai puro. In esso le unità degli ordini più elevati sono 20, 400, 8000, 160000, ecc. e speciali parole pei primi quattro numeri di questa serie si trovano attualmente fra' Mayas del Yucatan. Il passaggio dal quinario al vigesimale appare nel sistema degli Aztechi, il quale può essere rappresentato così: $1, 2, 3, 4, 5, 5+1, \ldots, 10, 10+1, \ldots, 10+5+1, \ldots$, $20, 20+1, \ldots, 20+10, 20+10+1, \ldots, 40$, ecc., e speciali parole occorrono pei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 40, ecc. Un tale sistema fioriva in America, ma raramente era usato nel vecchio mondo. Reliquie di origine celtica se ne incontrano nelle parole francesi *soixante-dix* (60 e 10), *quatre-vingts* (4×20), *six-vingts* (6×20), *sept-vingts* (7×20) e nella denominazione *les quinze vingts* di un ospedale a cagione dei suoi 300 (15×20) ammalati. Queste tracce di notazione vigesimale sono una caratteristica della razza celtica. Nel Gaelico si trova *aon deng is da fichead* = *uno, dieci e due venti* = 51; nel Welsch *unarbymtheg ar ugain* = *uno e quindici sopra venti* = 36. Forse vi è anche traccia di influenza celtica nel modo di contare abbastanza comune in inglese: *three score and ten* = *tre-venti e dieci*, *four score and fifteen* = *quattro-venti e quindici*, ecc.

5. Vediamo ora se si può trovare un nesso, come nella maggior parte degl'idiomi dei selvaggi, fra le pa-

---

n. a Nimega, latinamente detta Noviomagus, nel 1494, m. a Colonia nel 1570), il simbolo X deriva dal verbo *decussare*, che significa che due segmenti rettilinei si segano l'uno con l'altro, mentre poi *decussare* deriva da *decussis*, moneta che valeva appunto *dieci* assi (Vegg. Frizzo, *op. cit.*, pag. 31), ed il simbolo V non è che la metà superiore di X.

role che nelle lingue ariane rappresentano i dieci primi numerali e i gesti usati per contare sulle dita. Come abbiamo innanzi osservato, vi è nelle lingue ariane una differenza fra i primi tre o quattro numerali e gli altri sette o sei: questa differenza deve avere un'origine non solo etimologica ma anche cronologica e dobbiamo quindi inferire, come abbiamo innanzi detto, che fra gli Arii, come fra le altre razze, il conteggio dei numeri inferiori era stato appreso prima dell'uso del conteggio sulle dita, e quando furono adoperate le dita, fu fatto subito un gran progresso. E ciò viene sempre più confermato dal fatto che nei nomi dei primi tre o quattro numerali, costrutti nelle lingue ariane con lo stesso materiale, non trovasi una relazione logica fra essi e le dita. Riportiamo qui l'etimologia dei primi quattro numerali.

Il greco εἷς (arcaico οἰνός), il latino *unus* (arcaico *oinos*), il tedesco *eins*, l'inglese *one* corrispondono al suffisso dimostrativo sanscrito *enas* = *quello*, *quello là*, che ha qualche volta il significato di *uno* (1).

Il greco δύο, il latino *duo*, il tedesco *zwei*, l'inglese *two* corrispondono tutti al sanscrito *dvi* = *due*, ch'è radice verbale e ch'esprime *dividere*, *separare*, come nel suo derivato *dvi-sh* = *odiare, allontanarsi da:* da qui deriva il sanscrito *dua-ra* = *porta a due battenti,* il russo *dver,* l'inglese *door,* il tedesco *thür*, il greco θύρα, ecc.

Il greco τρεῖς, il latino *tres*, il tedesco *drei,* l'inglese *three* corrispondono al sanscrito *trsh* = *tre,* ch'ha forza di comparativo e che usato come verbo significa *trapassare, penetrare, andare oltre,* e ci ricorda il tempo in cui i nostri padri della famiglia ariana, che contavano fino a *due*, han fatto un passo in là, contando fino a *tre*.

Il greco τέτταρες ovvero τέσσαρες (in alcuni dialetti πίσυρες), il latino *quatuor*, l'antico alto tedesco *fior*, il

---

(1) In sanscrito *uno* è *èka* (*ai-ka*) che corrisponde anche al dimostrativo *questo,* ma che ha la stessa radice *i* di *enas* (*ai-na*).

tedesco *fier*, le forme inglesi *feowur, fower, feour, four*, corrispondono al sanscrito *chatur = quattro*, parola composta da (*e*) *ka = uno* e dalla radice di *tre*, e quindi essa significherebbe *uno-tre* (1).

6. Consideriamo ora i nomi dei numerali da cinque a dieci. Il greco πέντε, il latino *quinque*, il tedesco *fünf* e le forme inglesi *fif, five,* corrispondono al sanscrito *pankan* o *kankan = cinque.* Fin da quando A. di Humboldt per primo osservò la rassomiglianza fra la voce sanscrita *pankan* e la voce persiana *penjeh = mano aperta*, fu sempre ammesso dai filologi una connessione fra esse, facendo derivare la seconda dalla prima : il Curtius trova inoltre una connessione fra *pankan* ed il greco πύξ = *pugno* e fra *kankan* ed il tedesco *hand = mano.*

I nomi poi dei quattro numerali *sei, sette, otto, nove* possono essere i nomi delle quattro dita della mano destra, cioè del mignolo, dell'anulare, del medio e dell'indice ordinatamente.

Ed infatti, il greco ἕξ, il latino *sex,* il tedesco *sechs,* l'inglese *six* corrispondono al sanscrito *ksvaks* o *ksvaksva= sei;* ora il mignolo era dai greci chiamato ὠτίτης e dai latini *auricularis,* cioè *che pulisce l' orecchio* e ciascuna delle due voci sanscrite sembra essere una forma raddoppiata che contiene la medesima radice, come ξέω, ξαίνω, ξυρέω, ecc. e significa *raschiatoio.*

Il greco ἑπτά, il latino *septem*, il tedesco *sieben*, l'inglese *seven* corrispondono al sanscrito *saptan = sette*, e questa voce, dalla radice *sap = seguire,* significa *seguente, secondo* (cfr. *secundus* da *sequor*), e l' anulare segue il medio o è il secondo, se il mignolo è il primo.

Il greco ὀκτώ, il latino *octo,* il tedesco *acht,* l'inglese

---

(1) Le voci di *quattro* si riducono anche ad una forma Ariana fondamentale *kwatwar,* nella quale si potrebbe vedere una ripetizione con dissimilazione della forma *dvi* del *due* e quindi *quattro* significherebbe *due-due.*

eight corrispondono al sanscrito *aktan* = *otto* : questa voce sembra contenere la radice *ak* e significare *proiettante, sporgente,* e si può prendere pel nome del dito medio, che è più lungo degli altri (1).

Il greco ἐννέα, il latino *novem,* il tedesco *neun*, l'inglese *nine* corrispondono al sanscrito *navan* : ora l'indice è noto come ἀσπαστικός, *index, salutatorius, demonstratorius* e questo probabilmente è il significato di *navan* riferito alla radice di νέος, *novus*, ovvero di νεύω (= *cenno*) o di entrambi.

Il greco δέκα, il latino *decem*, il tedesco *zehn,* l' inglese *ten* corrispondono al sanscrito *dvakan* = *dieci* : questa voce sembra stare per *duakankan* = *due mani*, *due volte cinque* e da qui derivano le voci δεξιός, *dexter*, δέχομαι ecc. ed anche δάκτυλος, δείκνυμι, *digitus, dito, zehe*, *toe.*

7. Comunque si pensi di queste etimologie, devesi ammettere che non vi è alcun fatto da cui si possa inferire che i nostri progenitori contassero le dita della mano destra nell'ordine qui riferito. Essi poteano avere adottato l'ordine inverso, cioè dal pollice al mignolo, come molti selvaggi fanno e come in fatti usavano i Greci ed i Romani nel loro sistema più complicato di contare sulle dita, sistema che troviamo in uso anche nel primo secolo dell'E. V. Se ciò è, si può anche trovare una spiegazione dei numerali secondo altri nomi dell'uso comune per le dita. Così *ksvaks* è il pollice, *saptan* il seguente, ossia l'indice, *navan* l'anulare (2). Del

---

(1) Alcuni dalla desinenza delle voci greca, latina, gotica per questo numerale argomentano che esso possa accennare ad un duale e significare quindi *due-quattro.*

(2) I latini chiamavano questo dito *anularius* , perchè vi poneano l'anello nuziale, uso che, come tanti altri, viene probabilmente dall'India. Non è quindi da meravigliare se questo dito venisse indicato col nome di *navan, il nuovo, il giovane,* ossia *di dito della gioventù.* Questa interpetrazione viene anche corroborata dalle lingue slave , nelle quali il numero *nove* dicesi *devyni* che significa per lo appunto *giovane.*

resto, il principale argomento per accettare queste etimologie è la loro grande probabilità stabilita *a priori*, esaminando la storia del conteggio presso i selvaggi.

8. Stabilita la nomenclatura pei primi dieci numeri, non era difficile di progredire nell' arte del conteggio, facendo grandissimo uso per la composizione dei numeri dell'addizione e della moltiplicazione, molto raramente della sottrazione ed anche più raramente della divisione (1).

Preso il numero 10 come primo punto di fermata nel conteggio, o come unità di ordine più elevato, qualunque numero fra 10 e 100 è pronunziato dicendo $b.10 + a.1$, essendo a e b numeri interi minori di 10 (2).

I multipli di dieci, cioè 20, 30,..., 100 erano espressi mediante nomi composti neutri plurali nella forma: il nome di *cento*, latino *centum*, greco ἑκατόν, tedesco *hundert*, inglese *hundred* corrisponde al sanscrito *kanta* e questo si suppone stia in luogo di *dakan-dakanta* = *dieci decine*. Il numero 110 potrebbe essere espresso dicendo $10 \times 10 + 10$, ovvero 11×10. Questo secondo modo non sarebbe assurdo, poichè come si dice *ottanta*, *novanta*,

---

(1) P. es. 18 è detto in Latino 10 + 8 (*decem et octo*) in Greco 8 + 10 (ὀκτω-καὶ-δέκα), in francese 10,8 (*dix-huit*), in tedesco 8,10 (*acht-zehn*); in latino è anche detto 20-2 (*duo-de-viginti*), in basso bretone 3,6 (tri-omc'h), in welsh 2,9 (dew-naw), in azteco 15 + 3 (*caxtulli-om-ey*), mentre 50 è detto in basco *mezzo-cento*, in danese *due e mezzo volte venti*.

(2) È così che sono evidentemente composti i nomi dei numeri da 10 a 99. L'inglese *eleven*, lo svedese *elfva*, l'islandese *ellefn*, il danese *elleve*, l'antico alto tedesco *einlif*, il tedesco *eilf*, *elf* per *undici*, appariscono meglio e più completi nella forma gotica *ein-lif*. Qui *ein* rappresenta *uno* ed il suffisso *lif* è affine al suffisso lituanico *lika*, il quale a sua volta corrisponde al latino *decem* ed al greco δέκα. In quanto al mutamento di *d* in *l*, confronta il latino arcaico *dingua* col latino *lingua*. Per *dodici*, nell'inglese *twelve*, nell'anglo-sassone *twelf*, nell' antico alto tedesco *zwelif*, nel tedesco *zwölf* abbiamo lo stesso suffisso *lif* e *twe* (inglese *two*, tedesco *zwei* = due.

perchè non si potrebbe dire *undicanta* invece di *cento e dieci?* Ma è in questa scelta fra $10 \times 10 + 10$ e 11×10 che s'incardina la costruzione sistematica del sistema decimale dei numeri, e scegliendo la forma $10 \times 10 + 10$, si tratta l'unità 10 nell'identico modo che l'unità inferiore 1 nell'esprimere i numeri minori di 100. Scegliendo $100 = 10 \times 10$ come un secondo punto di fermata nel conteggio, ovvero come nuova unità, tutti i numeri compresi fra 100 e 1000 furono designati con $c. 10^2 + b. 10 + a. 1$, rappresentando con a, b, c numeri minori di 10; similmente i numeri fra 1000 e 10000, scegliendo 1000 come nuova unità, furono indicati con $d. 10^3 + c. 10^2 + b. 10 + a. 1$ e così di seguito. I multipli di cento sono ancora nomi composti e plurali, ma in latino e in greco sono aggettivi. In tutte le varie branche del linguaggio degli Arii sono poi diverse le parole per *mille* e sono tutte di origine oscura (1).

---

(1) Il greco χίλιοι = *mille* è probabilmente legato con χίλος = *erba;* rappresenta cioè tante unità quanti fili d'erba vi sono nei prati ed originariamente dovea indicare un numero grandissimo.

CAPITOLO II.

GLI EGIZIÀNI.

9. La storia della matematica incomincia invero con la fondazione della scuola ionica, poichè ben scarse sono le conoscenze che possediamo della cultura matematica dei primi popoli civili. Essendo però innegabile che i Greci acquistarono le prime nozioni della scienza esatta dai popoli loro circonvicini, crediamo opportuno di riportare qui brevemente quanto è noto intorno alle conoscenze matematiche dei popoli che nella via della civiltà precedettero il popolo greco.

10. Per quanto lo storico spinga lo sguardo nei più remoti tempi, trova sempre in Egitto un popolo già costituito in società. Si racconta che *Menes*, il primo re, deviò il corso del Nilo, costruì un gran bacino e fabbricò il tempio di Phtha a Menfi; gli Egiziani poi in epoca antichissima fabbricarono le piramidi. Un popolo che intraprese la costruzione di questi monumenti, dovea necessariamente avere conoscenza della matematica, almeno della matematica pratica. E tutti gli scrittori greci sono concordi nell'attribuire agli Egiziani la priorità dell'invenzione della matematica. Platone nel *Fedro* attribuisce al nume *Theuth* l'invenzione di molte scienze ed arti, l'aritmetica, il calcolo, la geometria, l'astronomia, il giuoco della dama e quello dei dadi, ed anche l'invenzione della scrittura. Aristotele dice che la matematica ebbe la sua culla in Egitto, perchè ivi i sacerdoti aveano tutto il tempo necessario a dedicarsi allo studio delle scienze. Erodoto, Diodoro, Diogene Laerzio, Giamblico ed altri antichi scrittori attribuiscono in particolare agli Egiziani l'invenzione della Geometria.

11. I metodi di numerazione degli Egiziani furono posti in luce dopo l'interpetrazione dei geroglifici, dovuta al Champollion, al Joung ed ai continuatori di questi due celebri egittologi.

Gli Egiziani aveano tre specie di scrittura: la geroglifica, la jeratica e la demotica; le ultime due specie erano forme degenerate della prima, derivate dal lungo uso della scrittura e dai tentativi di scrivere rapidamente.

Nella geroglifica i primi nove numeri si esprimevano ciascuno con la ripetizione del segno delle unità (un'asticina diritta) e questi segni così ripetuti si divideano in gruppi, ciascuno al più di 4 segni. Pei numeri maggiori di 9 essa scrittura avea segni particolari per 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 e 10000000 (fig. 1). Il numero delle decine, delle centinaia, ecc. era espresso mediante la ripetizione del segno, e per esprimere un qualunque numero si facea uso del principio additivo. Così per scrivere il numero 3427, si scriveano l'uno di seguito all'altro 3 volte il segno di 1000, 4 volte il segno di 100, 2 volte il segno di 10 e 7 volte il segno di 1.

(1) (10) (100) (1000)

(10000) (100000) (1000000) (10000000)

Fig. 1.

La scrittura jeratica avea segni particolari non solo per ciascuno dei primi nove numeri, ma ancora per le decine, per le centinaia e per le migliaia. Nella fig. 2ª i segni della prima linea rappresentano ordinatamente i numeri 1, 2, 3,..., 8; quelli della seconda linea

1 2 3 4 5 6 7 8

9 10 20 30 40 50 60 70

80 90 100 200 1000 3000

Fig. 2.

i numeri 9, 10, 20, 30,..., 70, e quelli della terza linea i numeri 80, 90, 100, 200, 1000 e 9000. Anche in questa scrittura si facea uso del principio additivo per esprimere un qualunque numero e, come nella geroglifica, i segni dei numeri più grandi precedeano quelli dei numeri più piccoli.

12. Nel 1877 Eisenlohr (1) interpetrò un papiro jeratico appartenente alla collezione *Rhind* del Museo britanico, trovando ch'esso era un manuale di matematica. Fu scritto da un certo AHMES, verso il 1700 a. C., sotto il regno di *Ra-à-us* (*Apeda* o *Apofi* della XVI o XVII dinastia degli Iksos), fondandosi sopra un altro manuale più antico scritto verso il 3000 a. C. Esso è il più antico documento matematico noto e mettendoci in relazione col pensiero matematico di un'epoca remotissima, di 30 a 50 sec. fa, ci dà interessanti notizie sul calcolo delle frazioni presso gli Egiziani.

13. Gli antichi incontravano serie difficoltà nel calcolo delle frazioni e perciò le trasformavano nella somma di altre, nelle quali era costante o il numeratore o il denominatore.

I Babilonesi teneano costante il denominatore, che era 60, e così i Romani, pei quali il denominatore, costante era 12. Gli Egiziani invece, ed anche i Greci, faceano in modo che il numeratore fosse costante ed eguale ad 1 e le frazioni si rappresentavano scrivendo il solo denominatore con sopra un punto od un simbolo chiamato *ro*.

Trasformavano quindi le frazioni, il cui numeratore era un numero qualunque nella somma di più unità frazionarie, che scriveano l'una di seguito all'altra senza alcun segno di operazione. Così poneano $\frac{2}{7} = \frac{1}{4}\ \frac{1}{28}$. A tale scopo nel manuale di Ahmes trovasi una tavola

(1) EISENLOHR, *Ein mathematisches Händbuch der alten Aegypter*, Leipzig, 1877: nel 1891 ne fu pubblicata una seconda edizione.

nella quale sono trasformate tutte le frazioni della forma $\frac{2}{2^n + 1}$, per $n = 2, 3, \ldots, 49$, nella somma di unità frazionarie.

Mediante questa tavola si possono risolvere i problemi come il seguente: « Dividere 2 per 35 » e si ottiene $\frac{2}{35} = \frac{1}{30} \frac{1}{42}$. In questo Manuale non si trova che una sola regola generale che è quella della moltiplicazione di una frazione per $\frac{2}{3}$. Vi si legge: « Se si domanda che cosa è $\frac{2}{3}$ di $\frac{1}{5}$, prendete il doppio ed il sestuplo; ciò è $\frac{2}{3}$ di $\frac{1}{5}$. Si può procedere analogamente per ogni altra frazione ». Devesi osservare che, scrivendosi il solo denominatore, l'autore dicendo « prendete il doppio ed il sesto » sottintende « del denominatore » poichè $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{6 \times 5}$. L'espressione « per ogni altra frazione » racchiude la regola generale espressa dalla relazione $\frac{2}{3} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{2\,a} \times \frac{1}{6\,a}$.

Non sappiamo nè quando, nè da chi, nè con qual metodo sia stata calcolata questa tavola. Osservandosi che il problema di esprimere una frazione come somma di unità frazionarie è per sè stesso indeterminato, sorse la questione di scoprire il metodo adoperato dall'autore; e considerandosi che le varie frazioni sono scomposte con metodi diversi, si concluse che probabilmente detta tavola sia stata compilata in diverse epoche, da diversi autori e forse empiricamente.

14. Il Papiro contiene poi 17 esempi che mostrano qual numero bisogna aggiungere ad una frazione data, o per qual numero bisogna moltiplicarla, per ottenere un dato risultato. Il metodo consiste nel ridurre le date

frazioni ad un comune denominatore, il quale non è sempre, cosa ben strana, multiplo comune dei denominatori delle date frazioni. Così p. es. volendo aumentare $\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{10}\frac{1}{30}\frac{1}{45}$ fino ad ottenere 1, Ahmes sceglie per denominatore comune 45, ed il calcolo è il seguente:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{45}=\left(11\,\frac{1}{4}+5\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}+4\,\frac{1}{2}+1\,\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{45}=\left(23\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\right)\frac{1}{45},$$

$$\left(23\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\right)\frac{1}{45}+\frac{1}{9}\,\frac{1}{40}=\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\,\frac{1}{3}=1,$$

adunque il numero richiesto è $\frac{1}{3}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{40}$.

I metodi adoperativi sono affatto estranei ai matematici moderni.

15. Nel Manuale di Ahmes si trovano altresì alcuni problemi che conducono ad equazioni di primo grado ad un'incognita. La quantità ignota è detta *hau* = *mucchio*, e vi si trovano simboli per l'addizione, la sottrazione e l'eguaglianza. Ecco un esempio:

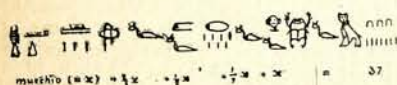



Fig. 3.

In questa figura abbiamo dei segni particolari per $\frac{2}{3}$ ed $\frac{1}{2}$; invece $\frac{1}{7}$ è indicato scrivendo quattro e sotto tre asticine e ponendovi sopra il segno ⊂⊃ = *ro*. Ecco un altro problema analogo al precedente: « Mucchio, i suoi $\frac{2}{3}$, la sua metà, il suo settimo, il suo intero fanno 33 »; cioè $x+\frac{2}{3}\,x+\frac{x}{2}+\frac{x}{7}=33$. Il metodo col quale Ahmes risolve questa equazione consiste nel determinare, come abbiamo innanzi visto, per quale numero

devesi moltiplicare $1 \frac{2}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{7}$ per ottenere 33; così ha:

$x = 14 \frac{1}{4} \frac{1}{97} \frac{1}{56} \frac{1}{679} \frac{1}{776} \frac{1}{194} \frac{1}{388}$. Da qui si vede che l'origine dell'Algebra rimonta agli antichissimi egiziani; epperò l'aritmetica e l'algebra sono coeve.

16. Nel documento, che brevemente stiamo esaminando, troviamo anche esempi di progressioni aritmetica e geometrica. Ecco un esempio: « Si dividono 100 pani fra 5 persone; $\frac{1}{7}$ di ciò che tocca alle prime tre eguaglia ciò che tocca alle altre due. Qual' è la differenza? » Ahmes dà la seguente soluzione:

« Si prenda la differenza $5 \frac{1}{2}$; 23, $17 \frac{1}{2}$, 12, $6 \frac{1}{2}$, 1.

Si moltiplichino per $1 \frac{2}{3}$; $38 \frac{1}{3}$, $29 \frac{1}{6}$, 20, $10 \frac{2}{3} \frac{1}{6}$, $1 \frac{2}{3}$ ». Come Ahmes pervenne al numero $5 \frac{1}{2}$? Forse così: se a e $-d$ sono il primo termine e la differenza della richiesta progressione aritmetica, si dovrà avere $\frac{1}{7}[a + (a-d) + (a-2d)] = (a-3d) + (a-4d)$, da cui $2d = 11(a-4d)$ e $d = 5 \frac{1}{2}(a-4d)$, cioè la differenza costante è $5 \frac{1}{2}$ dell' ultimo termine. Assumendo questo ultimo termine $= 1$, si hanno i numeri 23, $17 \frac{1}{2}$, 12, $6 \frac{1}{2}$, 1, la cui somma è 60; ma la somma dovrebbe essere 100, ed essendo $60 \times 1 \frac{2}{3} = 100$, si moltiplicano perciò i detti numeri per $1 \frac{2}{3}$ e si hanno i numeri richiesti. Troviamo qui un metodo di soluzione che appare molto più tardi prima fra gl'Indiani, poi fra gli

Arabi e quindi in Europa col nome di *falsa posizione.*

17. Dal medesimo Manuale apprendiamo altresì la somma delle conoscenze geometriche degli Egiziani in quel remoto tempo. Vi troviamo primieramente esempi di calcoli di volumi di granai e di altri simili ricettacoli. Per la determinazione dei detti volumi Ahmes moltiplica il prodotto di due delle tre dimensioni per una volta e mezzo la terza dimensione; ma ignorando noi la forma dei granai e degli altri ricettacoli di cui è parola, ci riesce impossibile da questi calcoli ricavare alcuna conseguenza. Invece in quasi tutti gli esempi di problemi planimetrici le figure che vi si trovano, tranne pochi casi, sono sufficienti a dare l'interpetrazione del calcolo. Le figure di cui Ahmes calcola le aree sono il quadrato, il rettangolo, il triangolo isoscele, il trapezio isoscele e il cerchio.

Dagli esempi rispettivi si argomenta che per valutare l'area del triangolo isoscele Ahmes moltiplica un lato per la metà della base; e similmente pel trapezio moltiplica un lato per la semisomma delle basi parallele. Quantunque l'errore sia relativamente piccolo, devesi però ammettere che Ahmes ignorava la regola esatta pel calcolo delle aree di queste figure, poichè da alcuni geroglifici scritti verso il 100 a. C., i quali enumerano dei terreni, con le rispettive aree, posseduti dal sacerdozio del tempio di Horus ad Edfu, nell'Alto Egitto, si argomenta che gli Egiziani anche in quell'epoca, quando la geometria avea già fatto presso i Greci immensi progressi, quasi 200 anni dopo Euclide, calcolavano similmente l'area di un triangolo isoscele e quella di un trapezio isoscele; ed inoltre di un quadrangolo irregolare di lati a, b, c, d calcolavano l'area mediante l'errata formola $\frac{a+b}{2} \times \frac{c+d}{2}$. Ahmes calcolava poi l'area di un cerchio, ponendola eguale al quadrato degli $\frac{8}{9}$ del suo

diametro; e faceva così il valore di π eguale a $\left(\frac{16}{9}\right)^2 =$ $= 3{,}1604...$

18. Le piramidi egiziane sono costruite in modo che le loro facce guardano i 4 punti cardinali; quindi si suppone che gli Egiziani abbiano costruita la retta nord-sud mediante osservazioni astronomiche e la retta est-ovest conducendo alla prima una perpendicolare. A poter far ciò si ammette che essi conoscessero il teorema inverso del teorema pitagorico, almeno nel caso semplice in cui i lati stanno fra loro come i numeri 5, 4, 3, e si suppone che essi costruissero gli angoli retti sul terreno con lo stendere a forma di triangolo rettangolo una corda divisa in tre parti rispettivamente di 5, 4, 3 lunghezze lineari (1).

19. Prima di finire questo cenno sul detto manuale, aggiungiamo che esso contiene ancora alcune questioni che sembrano avere una qualche relazione con le funzioni goniometriche. In queste questioni si tratta di trovare l'*uchatebt*, il *piremus* ed il *seqt*; e per l'apparente significato di queste parole, l'Eisenlohr ed il Cantor han creduto di poter stabilire che nella piramide quadrangolare della fig. 4 l'*uchatebt* possa essere o $2DE = DL$ o $2BE = BH$, il *piremus* o AD o AB, mentre il *seqt* è il rapporto della metà dell'*uchatebt* pel *piremus* ossia è eguale a $\frac{DE}{AD}$ ovvero a $\frac{BE}{AB}$, cioè a $\cos ADE$ ovvero a $\cos ABE$.

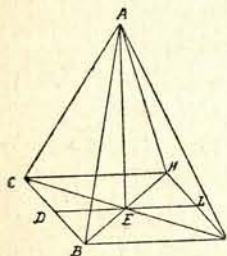



Fig. 4.

20. Senza dubbio il papiro di Ahmes rappresenta lo stadio più

(1) Si spiega così la parola *arpedonatti* ('Αρπεδονάπται), applicata dal filosofo Democrito, secondo ci riferisce Clemente d'Alessandria, ai geometri egiziani, come significante *tenditori di corde*.

elevato della matematica presso gli Egiziani. Ed è da osservarsi che quantunque essi siano pervenuti in epoca così remota ad uno stato relativamente avanzato nella conoscenza della matematica, come lo dimostrano altri due papiri, forse del medesimo periodo, scoperti nel 1889 e 1890 a Kahun, al sud della piramide di Illahun, per quasi due mila anni rimaséro stazionari. Infatti, non solo, quando i Greci 6 sec. av. C. incominciarono ad andare in Egitto per apprendervi le scienze, le nozioni matematiche degli Egiziani erano quelle stesse che trovansi nel manuale di Ahmes, ma un altro papiro, quello di *Akhmim* (1), così chiamato perchè scoperto recentemente ad Akhmim, città sul Nilo nell'Alto Egitto, scritto in greco fra il 500 e l'800 d. C., non segna alcun progresso su quello dei suoi predecessori. Un tal fatto si spiega osservando che, avendo gli Egiziani inserito le loro scoperte in matematica, come anche nelle altre scienze, nei loro libri sacri, non era più lecito ad alcuno di recarvi il ben che minimo cambiamento: quei libri chiudevano le porte al Progresso!

---

(1) J. BAILLET, *Le papyrus mathématique d'Akhmim* in *Mémoire, publiés par les membres de la mission archéologique française au Caires* T. IX, 1. fasc., Paris, 1892, pp. 1-88.

CAPITOLO III.

I BABILONESI.

21. La vera storia dei popoli, che abitarono la fertile valle fra l'Eufrate e il Tigri, incomincia con la fondazione di un regno sorto dalla riunione di varie e disperse tribù; sulla storia dei quali popoli molta luce ha sparso l'interpetrazione della scrittura cuneiforme, ch'è stata applicata agli idiomi dei Persi, degli Assiri, ed all'idioma scitico della Susiana.

22. La notazione numerica in questa scrittura, essendo ideografica, fu egualmente usata, con piccole differenze, dai Persi, dagli Assiri e dagli Sciti, malgrado la differenza delle tre lingue. In questa notazione un cuneo verticale con la punta in basso Y rappresenta l'unità semplice; un cuneo orizzontale più o meno aperto a destra e con la punta a sinistra < rappresenta 10. I numeri da 2 a 9 sono rappresentati con 2, 3,..., 9 cunei verticali diversamente aggruppati; e analogamente 20, 30,..., 90 sono indicati ripetendo 2, 3,..., 9 volte il segno di 10; così <<< = 30 e quindi << YY Y = 23. Pei numeri superiori a 99 un cuneo orizzontale con la punta a destra e con 1, 2, 3,..., 9 cunei verticali a sinistra significava 100, 200, 300,..., 900; così Y> = 100, YY> = 200: i cunei verticali fanno qui l'ufficio di coefficienti. Inoltre se un cuneo orizzontale, che significa 10, è posto a sinistra del gruppo indicante 100 dei due cunei, l'uno verticale e l'altro orizzontale, si ha il simbolo rappresentante $10 \times 100 = 1000$; e per indicare poi 2, 3,...,9 migliaia si mettono a sinistra di questo gruppo 2, 3,...,9 cunei verticali. Se poi a sinistra del gruppo rappresen-

tante 1000 si pone un altro cuneo orizzontale, questo gruppo rappresenterà $10 \times 1000 = 10000$. In generale in questa scrittura se il segno di un numero di ordine decimale inferiore è messo a destra di un segno di un numero d'ordine maggiore, il valore del primo si aggiunge a quello del secondo; ma se il primo è posto a sinistra del secondo, il valore di quello moltiplica il valore di questo. In questa scrittura poi non si è trovato alcun numero maggiore di 1000000.

23. Si posseggono due tavole dei Babilonesi di grandissimo interesse storico. Una di esse, scritta probabilmente fra il 2300 e il 1600 a. C., contiene i numeri quadrati fino a 60. Dopo i quadrati 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 dei numeri da 1 a 7, i quadrati dei numeri successivi 8, 9, 10, 11, ecc. sono così rappresentati 1.4, 1.21, 1.40, 2.1, ecc. Per comprendere questa scrittura bisogna tener presente che i numeri sono scritti nel sistema sessagesimale, e quindi $1.4 = 60 + 4$, $1.21 = 60 + 21, \ldots, 2.1 =$ $= 2 \times 60 + 1$, ecc. La seconda tavola riporta le parti del disco lunare illuminate nei singoli giorni dall'epoca della luna nuova a quella della luna piena, assumendosi l'intero disco diviso in 240 parti. Le parti illuminate nei primi 5 giorni sono date dai termini della progressione geometrica 5, 10, 20, 40, 1.20 (= 80) e quelle illuminate dal quinto al quindicesimo giorno dai termini della progressione aritmetica 1.20, 1.36, 1.52, 2.8, 2.24, 2.40, 2.56, 3.12, 3.28, 3.44. E questa seconda tavola non solo riconferma l'uso presso i Babilonesi del sistema sessagesimale, ma anche ci avverte di una qualche loro conoscenza intorno alle progressioni aritmetica e geometrica.

24. Vediamo da qui che per la notazione degli interi nel sistema sessagesimale i Babilonesi faceano uso dell'importante principio del valore di posizione. Tal fatto in così remota età è degno di nota, poichè nel sistema decimale il principio del valore di posizione non

è stato introdotto che nell'India verso il V o VI secolo d. C. Però tal principio per la sua generale e sistematica applicazione richiede un simbolo per lo *zero* ad indicare l'assenza di unità di qualche ordine; ma non sappiamo se presso i Babilonesi esistesse un tal simbolo, poichè nelle due sopradette tavole non vi è alcun numero che lo richieda.

25. Il sistema sessagesimale fu anche usato per rappresentare le frazioni; così nelle iscrizioni babilonesi $^1/_2$ e $^1/_3$ sono indicate rispettivamente con 30 e 20 sottintendendovisi la parola *sessantesimi*. Ipsicle e Tolomeo introdussero presso i Greci la notazione sessagesimale dei Babilonesi, adottata poi nei calcoli astronomici e matematici fino al secolo XVI, quando venne debellata dall'uso generale delle frazioni decimali.

26. Nel sistema decimale la scelta del numero 10 è dovuta, come abbiamo innanzi osservato, al numero delle dita delle due mani; ma non abbiamo alcun dato positivo che ci possa spiegare il perchè della scelta del numero 60 nel sistema sessagesimale. Il Cantor dà la seguente spiegazione. I Babilonesi fin da epoca remotissima calcolarono l'anno di 360 giorni e quindi divisero il circolo in 360 parti eguali o gradi, rappresentando ciascun grado la parte giornaliera della rotazione annua del Sole intorno alla Terra. Ora è possibile che essi conoscessero che l'arco la cui corda è eguale al raggio, è la sesta parte della circonferenza e quindi di 60°. Tenendo ciò presente, avranno potuto scegliere il numero 60 e per una maggiore precisione nei calcoli avranno poi diviso un grado in 60 parti. A conferma di ciò è noto che la divisione del giorno in 24 ore, dell'ora in 60 minuti e del minuto in 60 secondi è dovuta ai Babilonesi.

27. I popoli fra l'Eufrate ed il Tigri doveano aver fatto fin da tempo remoto un non piccolo progresso in Aritmetica. Essi doveano conoscere le progressioni aritmetica e geometrica ed avere anche una qualche cono-

scenza della proporzione, poichè Giamblico loro attribuisce l'invenzione della proporzione detta musicale. Pur non possedendo alcun documento, si deve ammettere che essi conoscessero l'uso dell'*abaco* (1), poichè nei popoli dell'Asia centrale ed anche in Cina l'abaco era antichissimo; ed essendo stata Babilonia un grandissimo centro commerciale, può supporsi che i suoi mercanti facessero uso di questo istrumento pei loro calcoli.

28. Delle conoscenze geometriche dei Babilonesi ben poco sappiamo. L'antica loro geometria dovea essere collegata con superstizioni, poichè troviamo le figure geometriche usate nei presagi. Fra queste figure vi sono una coppia di rette parallele, un quadrato, una figura con un angolo rientrante, ed una figura incompleta che forse rappresentava tre triangoli concentrici coi lati rispettivamente paralleli. Il testo che accompagna queste figure contiene la parola *tim* degli antichissimi Sumerii, la quale significa *linea* ed originariamente *corda*. Da ciò si deduce che i Babilonesi, come gli Egiziani, usavano delle corde per misurare le distanze. Che i Babilonesi conoscessero la divisione della circonferenza in 6 parti eguali si argomenta osservando le 6 razze nella ruota di un carro reale rappresentato in un disegno che si trovò nelle rovine di Ninive. Essi forse conosceano ancora che il raggio è eguale alla corda della sesta parte dell'intera circonferenza. Inoltre come gli Ebrei, essi calcolavano la circonferenza eguale a tre volte il diametro.

29. I Babilonesi coltivarono grandemente fin da antichissimi tempi l' Astronomia; e quando Alessandro il Grande dopo la battaglia di Arbele (331 a. C.), sconfitto Dario III, entrò in Babilonia, Callistene vi trovò sopra un mattone degli annali astronomici che rimontavano al 2234 a. C., e che furono mandati, come ci dice

(1) Di questo antichissimo istrumento di calcolo parleremo in seguito.

Porfirio, ad Aristotele. Tolomeo possedea degli annali babilonesi di ecclissi fin dal 747 a. C. Ultimamente Epping e Strassmaier (1) dall'interpetrazione di due calendari degli anni 123 e 111 a. C., trovati sopra tavolette appartenenti probabilmente a qualche antico osservatorio, trassero grandissimo partito per la cronologia e per l'astronomia babilonese.

---

(1) EPPING J., *Astronomisches aus Babylon. Unter mitwirkung von* P. J. R. STRASSMAIER. Freiburg, 1889.

CAPITOLO IV.

LOGISTICA PRESSO I GRECI.

30. I matematici greci distinguevano la *logistica* (λογιστική) (1) dall'*aritmetica*, denotando la prima l'*arte del conteggio*, la seconda la *scienza dei numeri*, la quale corrisponderebbe in certo modo a ciò che Gauss chiamò *arithmetica sublimior* e Legendre *Théorie des nombres.*

31. Per quanto lungi si spingano le ricerche storiche, troviamo presso i Greci una completa nomenclatura numerica sulla base decimale e l'uso del conteggio con le dita e con pietruzze, valendo per 1 ogni dito od ogni petruzza. Dovendo però esprimere numeri alquanto grandi, le pietre furono forse dapprima disposte in linee verticali, rappresentando ciascuna pietra nella prima linea unità, nella seconda decine, nella terza centinaia, ecc. La tavoletta, su cui erano condotte le linee, fu dai Greci chiamata *abaco*; e si vuole che questo istrumento sia stato introdotto da Pitagora sul suolo ellenico dall'Oriente.

32. Non possediamo alcun dato certo intorno all'uso dell'Abaco presso i Greci. Erodoto (II, 36) ci apprende che nel calcolo con le pietre gli Egiziani contavano, come scrivevano, movendo la mano dalla destra verso la sinistra, mentre i Greci dalla sinistra verso la destra. Da qui si argomenta che presso i Greci l'uso dell'abaco dovrebbe essere posteriore all'uso della scrittura, poichè

(1) Da λόγος, la cui radice λεγ vuol dire *raccogliere*. Nel medio-evo la parola *logistica* perdè il suo significato originario ed alcuni con essa designarono in seguito la teoria delle operazioni algebriche elementari, altri la teoria della risoluzione delle equazioni.

nei primi tempi essi scrivevano o dalla destra alla sinistra ovvero βουστροφηδόν. Il fatto poi, che la mano era mossa verso la destra o verso la sinistra, indica che il piano o quadro su cui si disponevano le pietre era diviso da linee *verticali*, cioè dall'alto in basso rispetto al calcolatore. Giamblico c'informa che l'abaco dei pitagorici era una tavola coperta di polvere o di sabbia.

33. Nel 1846 il Rangabé ha trovato nell' isola di Salamina una tavola di marmo di m. 1,50 per m. 0,75 che può essere stata un abaco greco. Le lettere sul contorno (Fig. 5) sono i numerali *attici*, di cui diremo in seguito, e sono in numero di 11 su due lati ed in numero di 13 su un terzo lato. La quinta lettera ad incominciare da destra in ogni lato è il segno attico della *dramma*, e le lettere che stanno a sinistra di questo segno rappresentano ordinatamente 5, 10, 50, 100, 1000 dramme; le due ultime lettere che trovansi poi in un solo lato rappresentano la prima 5000 e l'ultima 6000 dramme o un *talento*. Infine le quattro lettere che trovansi a destra del segno della dramma rappresentano le frazioni di dramma, ed indicano ordinatamente: $^1/_6$ di dramma od un obolo, $^1/_{12}$ di dramma ($^1/_2$ obolo), $^1/_{24}$ di dramma ($^1/_4$ dell'obolo) e $^1/_{48}$ di dramma ($^1/_8$ di obolo ovvero un χαλκοῦς).

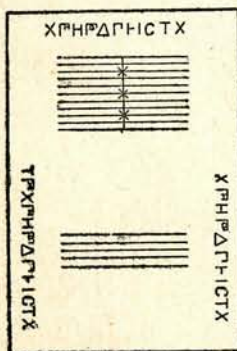



Fig. 5.

Sulla tavola poi da una parte vi sono 11 linee con 10 colonne e da un'altra 5 linee con 4 colonne.

Se essa rappresenta un abaco, ponendovisi dei gettoni, o delle piccole pietre, ciascun gettone indicava, secondo il posto, da un talento ad un obolo, se in una delle 10 colonne; e se in una delle altre 4 colonne, da un obolo ad un χαλκοῦς, secondo l'ordine con cui stanno disposte le lettere sul contorno. La linea, che divide in due

parti le 10 colonne, potrebbe servire a distinguere due numeri diversi, da sommare o da sottrarre, posti dalle due bande di essa, e le croci servirebbero a far meglio distinguere all'occhio le varie colonne.

34. I più antichi segni numerici dei Greci sono quelli che ora chiamansi *attici,* perchè trovati frequentemente nelle iscrizioni ateniesi: si chiamavano prima *segni erodiani,* perchè descritti la prima volta da Erodiano, grammatico bizantino del III secolo. In questo sistema, già riscontrato nella tavola di Salamina, il segno I, ripetuto non più di 4 volte, rappresenta l' unità (1) e gli altri segni, anch'essi iniziali delle parole greche dei nomi numerali, sono Γ (πέντε) = 5, Δ (δέκα) = 10, H (ἑκατόν) = = 100, X (χίλιοι) = 1000, M (μυρίοι) = 10000, e vi sono ancora i segni composti con un Γ ed un Δ per 50, con un Γ ed un H per 500, ecc. come nella figura 5.

Ma in un'epoca, che non si può perfettamente stabilire, i Greci adottarono l' uso delle lettere dell' alfabeto ionico, introdotto ad Atene verso il 400 a. C., pei segni numerali, aggiungendovi tre lettere che non appartenevano al loro alfabeto.

Trascriviamo qui questi segni:

α, β, γ, δ, ε, ς, ζ, η, θ = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π, ϙ = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90

ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, ϡ = 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 (2).

I numeri intermedi erano espressi per apposizione,

---

(1) È la lettera iniziale della parola Ἴα per μία.

(2) Le tre lettere ς, ϙ, ϡ, dette ἐπισήματα, erano rispettivamente denominate *stigma, coppa* e *sampi.* Esse sono detriti di un antico alfabeto fenicio o semitico. Si ha motivo di credere che il detto sistema di rappresentare i numeri sia stato creato in Alessandria non prima del III sec. a. C., ai tempi cioè di Tolomeo Filadelfo.

incominciando dalla sinistra col numero più grande. Così il numero 245 era espresso con $\overline{\sigma\mu\varepsilon}$. (1).

Le migliaia erano prese come unità di un ordine più alto e 1000, 2000,..., 9000 erano rappresentate con le medesime lettere dei nove primi numeri con un piccolo trattino alla sinistra ed in basso; così ${}_{1}\alpha = 1000$, ${}_{1}\beta = 2000$, ecc. applicando, come pei numeri minori, il principio di apposizione. P. es. $3479 = {}_{1}\gamma\upsilon o\theta$.

Per 10000 (una *miriade*) 20000, 30000,... ed in generale per un qualsiasi numero di miriadi, si faceva uso dei segni numerali indicanti il numero delle miriadi con la voce μυριάδες, presa come una nuova denominazione; si trovano perciò le voci μύριοι, δισμύριοι, τρισμύριοι, ecc. Per la parola μυρίας erano adoperate varie abbreviazioni; le più comuni erano M ovvero Mυ, scrivendovi sopra, e qualche volta prima o dopo, il numero delle miriadi. Così 456732 era $\overset{\mu\varepsilon}{M}{}_{1}\overline{\varsigma\psi\lambda\beta}$. Altre volte le miriadi erano rappresentate mediante il numero di esse con sopra due punti, come $\ddot{\rho} = 100$ miriadi (1000000) e le miriadi di miriadi similmente con due coppie di punti, come $\overset{::}{\mu} = 40$ miriadi di miriadi (4000000000). Diofanto poi denotava le miriadi seguite da migliaia scrivendone il numero delle loro unità e separando con un punto le miriadi dalle migliaia. Così $339776 = \overline{\lambda\gamma}.\,\overline{{}_{1}\alpha\varphi o\varsigma}$.

35. Le frazioni (λεπτά) erano scritte in vario modo: Erone nella sua *Geometria* scriveva il numeratore con un accento e di seguito il denominatore due volte con due accenti ciascuna volta, p. es. $^{2}/_{5} = \beta'\varepsilon''\varepsilon''$, $^{23}/_{33} = \varkappa\gamma'\lambda\gamma''\lambda\gamma''$; mentre Diofanto scriveva il numeratore

---

(1) Nelle Grammatiche greche si legge che i numerali alfabetici erano segnati con un accento per distinguerli dalle parole, ma non era questo l'uso comune, poichè ordinariamente soleasi a tal proposito porre sul numero una linea orizzontale.

sotto il denominatore, nel modo inverso come si pratica oggidì, ovvero scriveva prima il numeratore e poi il denominatore con ἐν μορίῳ o μορίον, per esem. $\frac{\kappa\varepsilon}{\kappa\alpha} = \frac{21}{25}$,

$$\frac{\alpha.\omega\iota\varsigma}{\rho\kappa\zeta.\varphi\xi\eta} = \frac{1270568}{10816},\ \overline{\tau\varsigma}.\ \overline{{}_{\iota}\theta}\ \mu o\rho.\ \overline{\lambda\gamma}.\ \overline{{}_{\iota}\alpha\psi o\varsigma} = \frac{3069000}{331776}.$$

Inoltre i Greci, seguendo gli Egiziani, soleano anche esprimere le frazioni scomponendole nella somma di più unità frazionarie, scrivendo per ciascuna di queste unità il solo denominatore con due accenti, ed indicando la somma per apposizione. P. es. $\delta''\varepsilon'' = \frac{1}{4}\frac{1}{5} = \frac{9}{20}$. Per le due frazioni $^1/_2$ e $^2/_3$, aveano segni particolari: il segno della prima rassomigliava ad un *L*, ad un *C* od anche ad un *S*, e quello della seconda ad un w.

36. I Greci, seguendo l'uso dei Babilonesi, aveano trovato utile d'introdurre nei loro calcoli, specialmente astronomici, le frazioni sessagesimali. Essi perciò dividevano la circonferenza, ed anche i 4 angoli retti al centro di essa, in 360 *parti* eguali (τρήματα o μοῖραι), ciascuna μοῖρα in 60 parti dette *primi* o *sessantesimi* (πρῶτα, ἑξηκοστά) o *minuti* (λεπτά), ciascuna di queste in δεύτερα ἑξηκοστά *(secondi)* ecc. Dividevano anche il raggio del cerchio in 60 parti eguali (τρήματα), e ciascuna di queste in 60^{mi}, ecc. Per scrivere i gradi della circonferenza al numero di essi premettevano μοῖραι o $\overset{\circ}{\mu}$; i minuti, i secondi, ecc. erano poi espressi con uno, con due, ecc. accenti affissi ai numerali, come oggidì. P. es. $\overset{\circ}{\mu}\ \overline{\gamma} = 3^\circ$, μοιρῶν $\overline{\mu\zeta}\ \mu\beta'\mu'' = 47^\circ\ 42'\ 40''$. Quando mancavano i gradi, o i minuti, o i secondi, ecc., al loro posto si poneva il segno O, che significava οὐδεμία μοῖρα, οὐδὲν ἑξηκοστόν, ecc.; così $\overline{O}\alpha'\beta''O''' = 0^\circ 1' 2'' 0'''$ (1). Analogamente per le

---

(1) Per questa indicazione il Delambre nell'*Histoire de l'Astronomie ancienne,* fedele alla sua tendenza di attribuire agli antichi le cono-

unità che rappresentano le parti del raggio, si usava la parola τμήματα e le frazioni si scriveano come innanzi, così τμήματα $\overline{\xi\zeta}$ δ′ νε″ = 67 (unità) 4′ 55″.

37. I Greci non aveano alcun segno per le operazioni: nel Commentario di Eutocio all'opera *Sulla misura del cerchio* di Archimede ed in quello di Teone all'*Almagesto* di Tolomeo troviamo degli esempi di addizione, di sottrazione e di moltiplicazione sia con numeri interi sia con numeri nel sistema sessagesimale. Ecco un esempio di moltiplicazione preso dal sopradetto Commento di Eutocio: l'operazione incomincia dalla sinistra e la lettera *L* qui sta invece del segno greco per $^1/_2$.

$\overline{{}_{\iota}\gamma\iota\gamma}$ $L\delta''$	$3013\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$
ἐπὶ ${}_{\iota}\gamma\iota\gamma$ $L\delta''$	$\times\ 3013\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$
$\overset{\text{ϡ}}{\mathrm{M}}$ $\overset{\gamma}{\mathrm{M}}{}_{\iota}\theta$ $\overline{{}_{\iota}\alpha\varphi}$ $\overline{\psi\nu}$	9000000 39000 1500 750
$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$ $\overline{\rho\lambda}$ $\overline{\varepsilon}$ $\overline{\beta L''}$	$30000\quad 130\quad 5\ 2\ \frac{1}{2}$
${}_{\iota}\theta$ $\overline{\lambda\theta}$ $\overline{\alpha L}$ $L\delta''$	$9000\quad 39\quad 1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$
$\overline{{}_{\iota}\alpha\varphi}$ $\overline{\varsigma L}$ δ'' η''	$1500\quad 6\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\quad \frac{1}{8}$
$\overline{\psi\nu}$ $\overline{\gamma\delta''}$ η'' $\iota\varsigma''$	$750\quad 3\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\quad \frac{1}{16}$
[ὁμοῦ] $\overset{\text{ϡ}\eta}{\mathrm{M}}{}_{\iota}\beta$ $\overline{\chi\pi\theta}$ $\iota\varsigma''$	$= 9082689\ \frac{1}{16}$

Si osservi che qui il moltiplicando è scomposto nella

scenze possedute dai moderni, volle sostenere l'ipotesi che i Greci avessero nozione dello zero e quindi anche del principio del valore di posizione delle cifre. Tale ipotesi, per l'autorità del celebre astronomo che la sosteneva, venne accolta generalmente in Francia ed accettata anche

somma $3000 + 13 + {}^1/_2 + {}^1/_4$ ed il moltiplicatore nella somma $3000 + 10 + 3 + {}^1/_2 + {}^1/_4$.

In quanto alla divisione riportiamo un esempio di questa operazione preso da Teone. Si voglia dividere $1515^\circ\ 20'\ 15''$ per $25^\circ\ 12'\ 10''$. Il metodo è secondo il seguente procedimento:

dividendo: $1515^\circ\ \ 20'\ \ 15''$ | divisore: $25^\circ\ 12'\ 10''$ — primo quoziente: 60°

$25^\circ \times 60^\circ = 1500^\circ$

resto $15^\circ = 900'$

totale dei minuti $920'$

$12' \times 60^\circ = 720'$

resto $200'$

$10'' \times 60^\circ = 600'' = 10'$

resto $190'$ | divisore: $25^\circ\ 12'\ 10''$ — secondo quoziente: $7'$

$25^\circ \times 7' = 175'$

resto $15' = 900''$

totale dei secondi $915''$

$12' \times 7' = 84''$

resto $831''$

$10'' \times 7' = 70''' = 1''\ 10'''$

resto $829''\ 50'''$ | divisore: $25^\circ\ 12'\ 10''$ — terzo quoziente: $33''$

$25^\circ \times 33'' = 825''$

resto $4''\ 50''' = 290'''$

$12' \times 33'' = 396'''$

---

dallo Chasles nella sua classica opera *Aperçu historique* (Paris, 1875, p. 476). Ma prima il Nesselmann nella sua *Algebra der Griechen* (Berlino 1842, pag. 138) e poi tutti i più autorevoli storici della matematica, han giustamente fatto osservare che il simbolo O adoperato da Tolomeo non è altro che l'iniziale dalla parola οὐδὲν. In base ai documenti fin oggi scoperti e decifrati devesi asserire che i Greci ed anche i Latini non aveano alcuna conoscenza dello zero.

Teone qui osserva che essendo $396''' > 290'''$, il quoziente cercato è qualche cosa minore di $60^0\ 7'\ 33''$.

38. In nessuna opera a noi pervenuta di matematici greci si trova la regola per l'estrazione della radice quadrata di un numero intero. Archimede nella sua opera *Circuli Dimensio* ci dà un gran numero di radici quadrate approssimate, ma egli ed il suo commentatore Eutocio tacciono intorno al modo di ottenere questi risultati. Eutocio ci dice solamente che la regola per trovarli fu data da Erone nella sua *Metrica,* da Pappo, da Teone e da altri commentatori dell'opera di Tolomeo. Questi scritti sono andati perduti, tranne quello di Teone, il quale però dà la regola seguente per l'estrazione della radice quadrata di numeri sessagesimali.

« Debbo far menzione del modo come si estrae la radice quadrata approssimata di un numero non quadrato, la cui radice è un numero irrazionale. Da Euclide, lib. II, prop. 4, apprendiamo che se una linea retta (finita è divisa da un punto in due parti, il quadrato dell'intera linea è eguale ai quadrati delle due parti e a due volte il rettangolo contenuto dalle medesime parti. Così se la retta $\alpha\beta$ è la radice razionale di un numero

α ——————— γ β quadrato come 144, prendiamo un quadrato minore, cioè 100, la cui radice è $10 = \alpha\gamma$. Moltiplichiamo 10 per 2, essendo due i rettangoli, e dividiamo 44 $(= 144 - 100)$ per 20. Il resto 4 è il quadrato di $\beta\gamma$, epperò $\beta\gamma$ è eguale a 2.

Fig. 6.

Sia ora dato il numero 4500, la cui radice è $67^0\ 4'\ 55''$. Prendiamo un quadrato $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 6) che contiene 4500^0. Il massimo numero quadrato contenutovi è 4489^0, il cui lato (radice) è 67^0. Prendiamo $\alpha\eta = 67^0$ e $\alpha\varepsilon\zeta\eta$ il quadrato di $\alpha\eta$. Il gnomone rimanente $\beta\zeta\delta$ contiene 11^0, ovvero $660'$. Dividiamo $660'$ per $2\alpha\eta$, cioè per 134^0; il quoziente è $4'$. Prendiamo $\varepsilon\theta = \eta\varkappa = 4'$ e completiamo i rettangoli $\theta\zeta$, $\zeta\varkappa$.

Questi rettangoli contengono 536′ (ciascuno 268′); rimangono 124′ = 7740″.

Da questo resto togliamo il quadrato $\zeta\lambda = 16''$: il rimanente gnomone è $\beta\lambda\delta = 7424''$. Dividiamo questo numero per $2\alpha\varkappa$ (= 134° 8′); il quoziente è 55″. Il resto è 46″ 40‴, ch'è il quadrato $\lambda\gamma$, il cui lato è approssimativamente eguale a 55 ».

Teone poi conclude in generale: « per estrarre la radice quadrata da un numero, prendiamo innanzi tutto la radice del massimo quadrato contenutovi. Dividiamo indi pel doppio di essa la differenza, ridotta a minuti, fra il numero dato ed il quadrato massimo sopradetto. Dal resto della divisione, ridotto a secondi, togliamo il quadrato del quoziente, il quale quadrato rappresenta secondi, e dividiamo il nuovo resto pel doppio dei gradi e dei minuti già trovati. Così infine otteniamo la radice approssimata ». Come si vede, questo è il procedimento tenuto oggidì.

39. Pria di finire questo rapido cenno sulle operazioni numeriche presso i Greci, riportiamo due passi della *Metrica* di Erone, l'uno per l'estrazione approssimata della radice quadrata e l'altro della radice cubica, che è la più difficile delle operazioni aritmetiche conosciute dagli antichi.

Il primo passo è il seguente: « Non avendo 720 radice razionale, otteniamo una radice a differenza minima come segue. Avendo 729, ch'è il quadrato più prossimo a 720, per lato 27, dividiamo 720 per 27 ed otteniamo $26\ \frac{2}{3}$. Aggiungiamo 27, ed abbiamo $53\ \frac{2}{3}$, la cui metà è $26\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$; adunque la radice più approssimata di 720 è $26\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$. Infatti moltiplicando $26\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ per sè stesso, si ha $720\ \frac{1}{36}$. Se vogliamo che la differenza sia ancora

più piccola di $\frac{1}{36}$, poniamo il valore ora trovato $720 \frac{1}{36}$ al posto di 729; così facendo, troviamo che la differenza risulta molto più piccola di $\frac{1}{36}$ ».

Da ciò si vede che il metodo di Erone per calcolare la radice quadrata approssimata di un numero N non quadrato è il seguente: Se $N = n^2 \pm p$, essendo n^2 il quadrato più prossimo ad N, si avrà come prima approssimazione di $\sqrt{N}$ il valore $x = \frac{1}{2}\left(n + \frac{N}{n}\right)$ e come seconda approssimazione il valore $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{N}{x}\right)$. Si potrebbe così proseguire e trovare valori sempre più approssimati.

Ecco poi il secondo passo che riguarda l'estrazione della radice cubica, unico passo a noi noto di autore greco intorno questa operazione. « Vogliamo ora dire come si possa trovare la radice cubica di 100 unità. Prendiamo i due cubi più prossimi a 100, il maggiore ed il minore, i quali sono 125 e 64, e determiniamo di quanto il primo è maggiore, cioè 25, e di quanto il secondo è minore, cioè 36. Moltiplichiamo allora 36 per 5; abbiamo 180. Aggiungendo 100, si ha 280 (per il quale dividendo 180, abbiamo $\frac{9}{14}$). Aggiungendo questo risultato alla radice del cubo minore, cioè a 4, otteniamo $4 \frac{9}{14}$, ch'è la radice cubica di 100 con la massima approssimazione possibile ».

La regola generale che nell'esempio sopra riferito è applicata, è la seguente: Se $x^3 < N < (x + 1)^3$, posto $(x + 1)^3 - N = p$, $N - x^3 = q$, sarà approssimativamente $\sqrt[3]{N} = x + \frac{q\sqrt{p}}{q\sqrt{p} + N}$.

40. Dobbiamo ancora parlare del tentativo di Archimede e di Apollonio per estendere la numerazione presso i Greci.

In uno scritto dal titolo *Arenaria* Archimede si propone di enunciare il numero dei granelli di arena che abbia una massa eguale al Cosmo, di cui assume il diametro essere minore di 10 000 000 000 stadi.

Supponendo poi che 10000 granelli di sabbia occupino un volume non maggiore di un seme di papavero, e che questo non sia maggiore di $^1/_{40}$ della grossezza di un dito, egli perviene, facendo uso dell' ordinaria nomenclatura, a numeri superiori ad una miriade di miriadi (10^8). I numeri fino ad una miriade di miriadi sono da lui chiamati del *primo ordine;* assumendo una miriade di miriadi come nuova unità, forma i numeri del *secondo ordine*, cioè le unità, le decine, ecc. del secondo ordine, fino ad una miriade di miriadi del secondo ordine (10^{16}). Assumendo una miriade di miriadi del secondo ordine come novella unità, forma analogamente i numeri del *terzo ordine*, che vanno fino ad una miriade di miriadi del terzo ordine (10^{24}); e così di seguito. Da qui si vede che scrivendo i termini della progressione geometrica 10^0, 10^1, 10^2,..., i primi 8 termini (10^0-10^7) appartengono al primo ordine, i successivi 8 (10^8-10^{15}) al secondo ordine, ecc. e così i numeri vengono divisi in *ottavi*, il che equivale nella nostra numerazione a dividere i numeri in gruppi di 8 cifre ad incominciare da destra.

Tenendo poi presente che le sfere stanno fra loro come i cubi dei rispettivi raggi, Archimede finalmente trova che il numero dei granelli di sabbia che la sfera del Cosmo contiene è minore di 10^{63}.

Per quanto sappiamo, questa notazione non fu usata da alcun altro matematico greco, ed Archimede stesso non ne fa uso che in questo solo scritto, nel quale, è

bene notarlo, egli si limita ad indicare le operazioni, senza eseguirne alcuna.

41. Apprendiamo da un frammento del 2° libro di Pappo (1) che Apollonio, in un'opera a noi totalmente ignota, facendo al sistema ideato da Archimede un felice cambiamento, divise le successive potenze di 10, da 10^0 in poi, in gruppi di 4 termini, formando così *tetradi* invece degli *ottavi* del matematico siracusano; il che corrisponde nel nostro sistema a scomporre il numero in gruppi ciascuno di 4 cifre incominciando da destra. Il primo tetrado (10^0-10^3) fu da lui chiamato delle *unità* il secondo (10^4-10^7) delle *miriadi semplici*, il terzo (10^8-10^{11}) delle *miriadi doppie* o *del secondo ordine*, ecc. Il primo numero di ciascun tetrado è la sua unità, e i tetradi dal secondo in poi sono contrasegnati, così in Pappo, coi segni Mα, Mβ, Mγ, ecc. P. es. il numero 5 601 052 800 000, ovvero secondo la divisione in tetradi, 5 6010 5280 0000 è scritto da Pappo Mγ. ε̄ καὶ Mβ. ͵ςι̅ καὶ Mα. ͵εσπ.

42. Il frammento di Pappo contiene degli esempi che illustrano le prop. XIV-XXV dell'opera di Apollonio. Devesi notare che i numeri da 1 a 9 erano chiamati dai Greci i πυθμένες, *numeri fondamentali*, delle decine, delle centinaia, ecc.; così 7 era il πυθμήν di 70, di 700, di 7000, ecc. (2). La prop. XIV p. es. si propone: dati

---

(1) Il frammento di cui qui è cenno, è stato pubblicato dal Wallis nel t. III delle sue opere. I due primi libri dell'opera di Pappo, della quale parleremo in seguito, trattavano particolarmente di Aritmetica e forse, se fossero a noi pervenuti, vi avremmo trovati i precetti e i metodi secondo i quali i Greci eseguivano le operazioni numeriche; ma questi due libri andarono perduti e non ci resta che il solo frammento sopradetto.

(2) I *pitmeni* delle decine, delle centinaie, ecc. non appaiono nel simbolismo numerico dei Greci, come nel nostro sistema di numerazione scritta; ma è facile scernerli nei nomi dei numeri, così p. es. si vede che τρεῖς è il *pitmene* di τρίακοντα, di τριακόσιοι, ecc. Le prop. di Apollonio corrispondono alla regola che trovasi nei nostri trattati di Aritmetica per formare il prodotto di numeri che terminano con zeri.

più numeri, ciascuno minore di 100 e divisibili per 10, trovare il loro prodotto, senza moltiplicarli. Siano i numeri 50, 80, 50, 40, 40, 30. I loro *pitmeni* sono ordinatamente 5, 8, 5, 4, 4, 3, il cui prodotto è 6000. Ora questi numeri sono 6 e ciascuno rappresenta decine: dividendo 6 per 4, si ha per quoziente 1 e per resto 2; epperò il prodotto di 6 numeri rappresentanti decine è 100 miriadi semplici; questo numero poi moltiplicato per 6000 dà 60 miriadi del secondo ordine, e questo è il richiesto prodotto. Tutte le altre proposizioni sono del medesimo tenore.

LA MATEMATICA PRESSO I GRECI

CAPITOLO V.

PERIODO PRE-EUCLIDEO.

43. Il periodo della matematica presso i Greci prima di Euclide, periodo che si può chiamare di preparazione, incomincia da Talete e si chiude con lo sfacelo dell'impero di Alessandro il Macedone, comprendendo circa tre secoli.

Ben scarse sono le notizie che abbiamo intorno ai progressi della matematica in questo periodo. Eudemo di Rodi, che visse verso il 330 a. C., avea scritta un'elaborata storia della geometria greca fino ai suoi tempi; ma quest' opera è perduta e di essa conoscesi solo quanto altri storici posteriori han riportato. Proclo (410-485 d. C.), che dovette conoscere l'opera di Eudemo, dà nel suo Commento al I libro degli *Elementi* di Euclide molte notizie storiche e principalmente un cenno molto importante sui geometri anteriori ad Euclide, cenno che forse è stato compilato sulla storia di Eudemo e che in seguito, occorrendo, indicheremo sotto il nome di *Sommario di Eudemo.*

Talete e la scuola ionica.

44. Talete nacque verso il 640 a. C. a Mileto, la città principale della costa ionica, da famiglia oriunda dalla Fenicia, e morì vecchissimo nella città nativa. Si narra ch'egli nella sua gioventù erasi dedicato al commercio, e forse a scopo commerciale viaggiò in Egitto,

dove ebbe campo di studiare le nozioni della matematica e delle altre scienze di quel popolo, che gli offriva una civiltà vetustissima. Fu celebrato per aver predetta un'eclissi solare, che infatti avvenne (1), quando gli eserciti di Midia e di Lidia stavano pronti alla battaglia nella vallata dell'Ali, per decidere delle sorti dell'Asia Minore. I due eserciti non volendo combattere che alla luce del Sole, deposero allora le armi e scesero agli accordi. Ciò accrebbe fama alla predizione di Talete, il quale fu anche annoverato fra' saggi sotto l'arcontato di Damaso (585-583 a. C.).

45. Non parleremo qui della teoria di Talete sulla struttura dell'universo e delle sue osservazioni astronomiche: riportiamo solamente quei teoremi di Geometria che a lui si attribuiscono:

1°. Il cerchio è bisecato da un suo diametro; 2°. Se due rette si tagliano, gli angoli opposti al vertice sono eguali; 3°. Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono eguali o, come in modo antiquato era detto, sono *simili;* 4°. L'angolo inscritto in un semicerchio è retto; 5°. Un triangolo è determinato quando sono dati un lato e i due angoli adiacenti.

L'ultimo teorema è attribuito a Talete da Eudemo, secondo ci riferisce Proclo, poichè, questi dice, è « necessario per determinare le distanze dei vascelli in mare, secondo il metodo usato da Talete in questa ricerca ». Proclo però nulla ci dice di questo metodo, e quindi furono fatte diverse congetture. Considerando che la soluzione più probabile di detto problema dovrebbe essere la più antica fra quelle note storicamente, si attribuisce a Talete la *fluminis variatio* dell'agrimensore romano Marcus Junius Nipsus, che è la seguente: Per misurare la distanza del punto A dal punto inaccessibile B,

---

(1) La data più probabile di questo fenomeno è il 28 maggio del 585 a. C.

si costruisca sul terreno ad AB (Fig. 7) la perpendicolare AC di una qualunque lunghezza, e sia D il punto medio di AC; nella direzione opposta ad AB si costruisca in C ad AC la perpendicolare, e sia E il punto ove questa è incontrata dalla retta BD. Misurando il segmento CE, si avrà la lunghezza cercata.

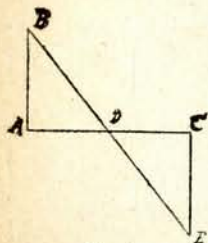



Fig. 7.

Non è questa la sola applicazione pratica della geometria che si attribuisce a Talete: si vuole ancora che in Egitto egli insegnasse a misurare l'altezza di una piramide. Diogene Laerzio ci riferisce che Talete a ciò perveniva « osservando l'ombra della piramide nel momento in cui la nostra è della stessa grandezza di noi »; mentre Plutarco nel *Banchetto dei sette saggi* ci narra che Talete misurava detta altezza, osservando che la lunghezza dell'ombra di una piramide sta alla lunghezza dell'ombra di un bastone verticale come l'altezza di quella all'altezza di questo, e quindi dovrebbesi attribuire a lui la conoscenza del teorema che due triangoli equiangoli hanno i lati omologhi proporzionali.

Per la conoscenza del 4º teorema innanzi citato, cioè dell'angolo retto inscritto nel semicerchio, Talete dovea conoscere quello della somma degli angoli interni di un triangolo e forse anche altri teoremi non ricordati dagli antichi. Ma senza dilungarci qui a riferire le congetture fatte intorno alle conoscenze matematiche di Talete, osserviamo che merito suo principalissimo è quello di aver per primo sul suolo greco rivolta la sua mente a questioni geometriche, trasportandovi ed accrescendo probabilmente le conoscenze geometriche degli Egiziani, facendo oggetto dei suoi studî piuttosto le linee che le aree.

46. Talete è considerato come il fondatore della scuola ionica, non perchè egli abbia raccolto intorno a

sè un gruppo di discepoli, ma per l'epoca e per il luogo in cui vissero gli uomini che a quella scuola si aggruppano, e principalmente per le dottrine da questi professate.

I più celebri rappresentanti di questa scuola sono ANASSIMANDRO (611-545 a. C.) e ANASSIMENE (570-499 a. C.), il quale ultimo segna il completo distacco della scuola ionica dalla matematica: essa si applicò principalmente allo studio dell'astronomia e della filosofia naturale. A questa scuola la matematica deve ben scarsi contributi; è a Pitagora ed alla sua scuola che devonsi principalmente i progressi della scienza esatta.

Pitagora e la scuola italica.

47. Lo storico che voglia parlare di PITAGORA (1) e della sua scuola, si trova molto imbarazzato a scernere la verità storica fra le leggende e le invenzioni poetiche che avvolgono l'uno e l'altra. Gli autori anteriori ad Aristotele ne parlano pochissimo e lo stesso Platone, che ha tanti punti di contatto col pitagorismo, è molto sobrio nei fatti storici. La medesima sobrietà trovasi negli antichi peripatetici, quantunque fin da quei tempi la leggenda si era già impossessata di Pitagora, leggenda che a mano a mano si allarga dalla sua vita alla sua dottrina. Apparso in fine il neopitagorismo, la leggenda rifulge di tutto il suo splendore, e gli scrittori raccontano dettagliatamente la vita ed espongono le

---

(1) Il Vincent (*Nouv. Ann. de math. par Terquem et Gerono*, 1852) in una nota ad un suo articolo sul teorema di Pitagora propone la seguente etimologia del nome di *Pitagora*. Egli dice: « Πυθαγόρας può dedursi 1º dalla parola « Πύθων, Pitone, nome del serpente combattuto « ed ucciso da Apollo,.... 2º dalla parola ἀγορεύω, *arringare*, *parlare* « *in pubblico*,.... Così... Πυθαγόρας può interpetrarsi *colui che parla* « *come Apollo Pitione*, ovvero *nel nome di Apollo Pitione, il Verbo, la* « *voce di Apollo Pitione* ».

dottrine del fondatore della scuola italica. Apollonio di Tiana, che visse nel primo secolo d. C., scrive la vita di Pitagora; Moderato compone un'opera sulla filosofia pitagorica; Nicomaco ci dà la dottrina e la teologia dei numeri; e le notizie relative a Pitagora sono così abbondanti che diventano possibili narrazioni simili a quelle di Porfirio e di Giamblico. Diremo qui però brevemente della sua vita quanto è meno dubbioso.

Nato a Samo verso la 49ª Olimpiade (1), lo si fa viaggiare ed istruirsi presso i Fenici, i Caldei, i Magi di Persia, gl'Indiani, gli Ebrei, ed anche presso i Traci ed i Druidi della Gallia, ma innanzi tutto presso gli Egiziani, dai quali apprende i misteri. Storicamente non si può neppure provare il suo viaggio in Egitto, quantunque questa tradizione sia la sola che incontri meno difficoltà ad essere accettata.

Nella storia del sommo filosofo di Samo il primo punto nel quale non vi sia alcun dubbio è la sua venuta nella Magna Grecia nella 59ª o 60ª Olimpiade. Alcuni affermano ch'egli prima abbia insegnato a Samo e che poi, o perchè non avesse acquistato presso i suoi concittadini quella importanza alla quale aspirava, o perchè mal sopportasse la violenta tirannia di Policrate.

(1) Per passare da un'epoca espressa in Olimpiadi (di 4 anni ciascuna) nella corrispondente av. o d. C. e viceversa, l'Ideler *(Lehrbuch der mathematischen und technischen Chronologie,* II Aufl., Berlin 1883, 1º vol.) propose il seguente metodo: Indicando con m l'anno della n.*ma* Olimpiade, la differenza $777-[4(n-1)+m]$, se positiva, indicherà l'anno corrispondente a. C.; se negativa, il suo valore assoluto aumentato di 1 indicherà invece l'anno corrispondente d. C. Per trovare invece l'anno olimpico che corrisponde ad un dato anno a. C., p. es. al d.*mo*, si divida per 4 la differenza $777-d$. Se $n-1$ è il quoziente ed m il resto, l'anno cercato sarà l'm.*mo* della n.*ma* Olimpiade; se $m=0$, esso sarà il 4º della $(n-1)$.*ma* Olimpiade; per trovare poi l'anno Olimpico corrispondente ad un dato anno d. C., si aggiunga a questo 776 e si opera come innanzi.

venne a stabilirsi a Crotone, oggi Cotrone, città antichissima fondata da Achei e Spartani, la quale a lui si raccomandava per la sua popolazione sommamente attiva. Là egli trovò un terreno molto appropriato pei suoi progetti, e la scuola che vi fondò ben presto estese la sua rinomanza. Vide a sè venire non solo dalle colonie greche, ma anche dalle altre regioni italiche, una folla di discepoli di ambo i sessi. I più celebri legislatori di queste contrade, si racconta, lo ebbero a maestro.

48. La scuola pitagorica ci si presenta non solo come un'associazione scientifica, ma ancora come una corporazione religiosa e politica. I suoi membri, divisi in due ordini, i *matematici* e gli *uditori*, erano legati da giuramento di non svelare le dottrine e le scoperte che vi si facevano. L'ammissione era subordinata a prove rigorose ed all'osservazione di un silenzio di più anni e gli affiliati si riconoscevano a segni segreti.

Quest'associazione ben presto si sparse nelle altre città della Magna Grecia, ed essendosi impossessata della cosa pubblica, massime nelle città a governo aristocratico, divenne oggetto del sospetto e dell'odio popolare. Per questo in una sollevazione, promossa dal partito democratico, i pitagorici di Crotone furono attaccati, Pitagora dovette fuggire prima a Taranto e poi a Metaponto, ove morì verso la 69ª Olimpiade.

49. L'insegnamento nella scuola pitagorica sembra che sia stato tutto orale e tradizionale: Filolao, contemporaneo di Platone, è generalmente creduto pel primo che abbia scritto un'opera sulla filosofia Pitagorica, della quale opera ci sono pervenuti pochi e brevissimi frammenti. Dobbiamo quindi nel tracciare la seguente storia affidarci ad osservazioni incidentali di scrittori greci posteriori.

Proclo nel suo Commento al I lib. di Euclide ci

dice che la parola *matematica* (1) ebbe origine coi pitagorici, e nel suo *Sommario di Eudemo* ci fa conoscere che « Pitagora trasformò lo studio della Geometria in « una scienza liberale; poichè risalì ai principî generali « e ricercò i teoremi astrattamente e colla pura intel- « ligenza ».

50. L'Aritmetica, *scienza dei numeri in astratto*, incomincia in Grecia con Pitagora; e seguendo il suo esempio, si conservò per molti secoli il suo simbolismo, la sua nomenclatura ed anche i limiti da lui assegnati a questa branca della matematica.

Presso i Greci in quel tempo aveano già preso stanza gli studî filosofici e si cercava di scoprire un qualche principio di omogeneità nell'universo, principio che la scuola ionica cercava nella materia e che Pitagora asseriva trovarsi nella struttura medesima delle cose. Avendo egli osservato che il numero era essenziale per l'esatta descrizione delle forme e delle loro relazioni, concluse che il numero era la causa della forma e di ogni altra qualità della materia. Considerava il numero come la base della creazione e per lui il numero era quantità, la quantità forma, la forma qualità.

All'Aritmetica egli ricorreva per le definizioni dei termini astratti e per le sue spiegazioni delle leggi naturali. Ma le sue ricerche aritmetiche si collegavano con la geometria, ed egli tentava sempre di trovare formole aritmetiche mediante verità geometriche e viceversa.

51. Nella scuola pitagorica i numeri furono divisi in classi, ed almeno fin dal tempo di Platone, i pita-

---

(1) La radice μαθ della parola μαθήματα significa *un pensiero elevato, una investigazione*, perciò ἡ μαθηματική vuol dire propriamente *scienza* (CURTIUS, *Grundzüge der griechischen Etymologie)*; e nelle varie scuole degli antichi filosofi greci, ed anche ai tempi di Platone, con la parola μαθήματα s'intendeva tutto ciò ch'era oggetto d' insegnamento scientifico. Presso i peripatetici per la prima volta questa parola venne usata a significare in particolare la scienza esatta.

pitagorici distinguevano i numeri in *dispari* e *pari*; quelli erano *gnomoni* (1) e come si legge nella *Fisica* di Aristotele (III, 4) « i Pitagorici formavano i numeri quadrati, aggiungendo successivamente i gnomoni all'unità ». I numeri composti non quadrati erano detti *eteromici* ed in particolare se composti di due fattori erano detti *piani* e se di tre *solidi*. Oltre i numeri *quadrati* e *cubi* furono poi introdotti altre classi di numeri. Un numero della forma $\frac{1}{2}n(n+1)$ era chiamato *triangolare;* dicevasi *perfetto* se eguale alla somma di tutti i suoi fattori compreso 1 ed escluso il numero stesso (2); *ab-*

---

(1) La parola *gnomone* presso i Greci ebbe vari significati. Dalla radice γνω significa propriamente *ciò per cui una cosa è nota* ed indicava originariamente lo stilo degli orologi solari, il quale con la sua ombra facea *conoscere* l'ora. Presso i Pitagorici essa indicava anche la *squadra,* ossia l'istrumento che verifica se un angolo è retto, e da ciò l'antico nome di *gnomone* alla perpendicolare. E poichè la figura della squadra si ottiene tagliando in un angolo di un quadrato un quadrato più piccolo, i Pitagorici chiamarono altresì gnomoni i numeri dispari 3, 5, 7,... che aggiunti ordinatamente ai numeri quadrati 1, 4, 9,... dànno i numeri quadrati di 2, 3, 4,... Presso Euclide gnomone è la figura che resta quando da un parallelogrammo si toglie il parallelogrammo che si ottiene costruendo da un punto di una diagonale le parallele ai lati; e da qui il nome di *teorema del gnomone* alla prop. 43 del lib. I degli *Elementi.* Inoltre presso gli antichi le unità che compongono i diversi numeri poligonali erano anche dette gnomoni. Erone di Alessandria ci ha lasciato la seguente definizione generale: *dicesi gnomone tutto ciò che aggiunto ad un numero o ad una figura rende l'intero simile a quello a cui è stato aggiunto.*

(2) P. es. $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Euclide nell'ultima prop. del lib. IX dei suoi *Elementi* dimostra che *se il numero* $2^{n}-1$ *è primo, il prodotto* $(2^{n}-1)\,2^{n-1}$ *è un numero perfetto.* Nicolò Tartaglia, celebre matematico italiano del XVI sec., nel suo Commento all'Euclide, osserva che da 1 a 10000 vi sono soltanto i 5 numeri perfetti: 1, 6, 28, 496, 8128. Si conobbero poi altri 4 numeri perfetti, che sono: 33 550 336; 8 589 869 056; 137 438 691 328; 2 305 843 008 139 952 128, i quali si ottengono ponendo $n = 13, 17, 19, 31$ in $(2^{n}-1)\,2^{n-1}$. Il Sig. Seelhoff di Brema ha ultimamente dimostrato che $2^{61}-1$ è primo e quindi il numero $(2^{61}-1)\,2^{60}$ è un altro numero perfetto. Non si conoscono numeri perfetti dispari.

bondante se minore (come p. es. $12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6$) e *diminuto* se maggiore come p. es. $(8 > 1 + 2 + 4)$. Due numeri si dicevano ancora *amicabili* se ciascuno di essi è eguale alla somma dei divisori dell'altro (1). Inoltre i numeri erano ancora aggruppati o in serie o in proporzione.

Da Nicomaco e da Giamblico apprendiamo che nella scuola pitagorica erano note le proporzioni aritmetica, geometrica e armonica, ed ancora, secondo Giamblico, Pitagora avea introdotto dalla Babilonia la proporzione detta *musicale*, cioè $a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b$. È anche attribuita ai pitagorici la dottrina delle progressioni aritmetiche.

52. La geometria dei pitagorici, come quella degli Egiziani, concerne principalmente le aree. A Pitagora è ascritto l'importante teorema che il quadrato dell' ipotenusa di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati dei due cateti, teorema ch'egli avrà potuto apprendere in Egitto nel caso particolare che i lati del triangolo siano rispettivamente di 3, 4, 5 unità. Proclo ci dice che la dimostrazione di esso, la quale leggesi nel I lib. degli ***Elementi***, appartiene ad Euclide; quindi molte congetture si son fatte intorno al modo

---

(1) Se M e N sono rispettivamente le somme di tutti i divisori di a e b, comprendendovi fra' divisori gli stessi numeri, affinchè questi siano amicabili è necessario che $M - a = b$ e $N - b = a$, epperò $M = N = a + b$. Il dotto matematico arabo Tabit ben Kurrah (833-902) ci dà il seguente teorema sui numeri amicabili, analogo a quello sui numeri perfetti di Euclide: *se* $p = 3.2^n - 1$, $q = 3.2^{n-1} - 1$, $r = 9.2^{2n-1} - 1$ *sono tre numeri primi, i numeri* $a = 2^n pq$, $b = 2^n r$ *sono amicabili*. (WOEPCKE, *Notice sur une théorie ajoutée par Thabit ben Korrah à l'arith. speculative de Grecs*, in *Journ. Asiatique*, 1852). Tabit dice che i numeri amicabili erano noti nella scuola pitagorica e Giamblico riferisce che i pitagorici aveano trovata la coppia 220 e 284 di tali numeri. Altre coppie di numeri amicabili sono: 17296 e 18415; 9363538 e 9437056.

come Pitagora sia pervenuto a dimostrare il teorema in generale. Egli avrebbe potuto osservare che un triangolo rettangolo resta diviso in due triangoli equiangoli fra loro ed al primitivo dalla perpendicolare costruita sull'ipotenusa dal vertice opposto, e sapendo che due triangoli equiangoli hanno i lati omologhi proporzionali, teorema forse noto anche a Talete, avrebbe dedotto che il quadrato di un cateto è equivalente al rettangolo dell'ipotenusa e della proiezione di esso cateto sull' ipotenusa; epperò se a e b sono i cateti e a', b' le loro proiezioni sull'ipotenusa c, avrebbe potuto trovare la relazione $a^2 + b^2 = ca' + cb' = c(a' + b') = c^2$ (1). Fu anche suggerita la seguente dimostrazione, molto più semplice: se un segmento è diviso in due parti a, b (fig. 8),

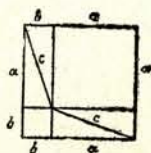
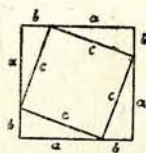



Fig. 8 Fig. 9

il quadrato dell'intero segmento è eguale ad $a^2 + b^2$ coi due rettangoli ab. Condotte le diagonali di questi rettangoli, si dispongano i 4 triangoli così ottenuti come appare nella figura 9. Rimane allora nel mezzo del quadrato primitivo il quadrato c^2 che sarà quindi equivalente ad $a^2 + b^2$.

Proclo poi attribuisce a Pitagora il seguente metodo per risolvere numericamente un triangolo rettangolo: si faccia un cateto eguale ad un numero dispari

(1) Questa dimostrazione trovasi nell'opera indiana *Algebra whith arith. und mensuration from Sanscrit of Brahmagupta and Bhascara, translated by* H. Th. Colebrooke, London, 1817. In Europa trovasi però la prima volta nell'opera *De Sectionibus angularibus* (cap. VI) del Wallis (1616-1703).

$2n + 1$; l'altro cateto sarà $2n^2 + 2n$ e l'ipotenusa $2n^2 + 2n + 1$. E lo stesso Proclo attribuisce altresì a Pitagora l'importante scoperta degli irrazionali. Comunemente si crede che Pitagora sia a ciò pervenuto, tentando di trovare numericamente i lati di un triangolo rettangolo isoscele, ma scorgéndone l'impossibilità, abbia dedotto che l'ipotenusa ed un cateto non hanno comune misura; e secondo Aristotele *(Analyt. Prior.* I, c. XXIII) la dimostrazione per assurdo che leggesi in Euclide dell'incommensurabilità del lato del quadrato e della sua diagonale è dovuta a Pitagora (1).

53. Il teorema sulla somma dei tre angoli di un triangolo, forse anche noto a Talete, fu dimostrato dai pitagorici secondo la maniera di Euclide. Essi dimostrarono altresì che il piano intorno ad un punto è completamente riempito da 6 triangoli equilateri o da 4 quadrati o da 3 esagoni regolari.

Una tale questione si riannoda alla scoperta dei 5 poliedri regolari, da Proclo attribuita ai pitagorici, i quali faceano corrispondere il tetraedro al fuoco, l'ottaedro all'aria, l'icosaedro all'acqua, il cubo alla terra ed il dodecaedro al cosmo, per cui furono chiamati *figure cosmiche.* I primi 4 erano certamente noti agli Egiziani; ma la costruzione del dodecaedro devesi attribuire ai Pitagorici, e Giamblico ci racconta che il pitagorico Ippaso fu annegato per aver divulgata la conoscenza della « sfera co' 12 pentagoni (cioè il dode-« caedro regolare inscritto), attribuendosene la gloria « della scoperta, mentre ogni cosa appartiene a Lui, « poichè essi così chiamavano Pitagora ». Dobbiamo

---

(1) Questa dimostrazione è del tenore seguente. Suppongasi che la diagonale ed il lato del quadrato stiano nel rapporto $p : q$; ove p e q sono numeri primi fra loro: dovendo essere $p^2 = 2q^2$, sarà p pari e quindi q dispari; posto $p = 2r$, dovrà aversi $(2r)^2 = 2q^2$, da cui si ricava q numero pari, il che è assurdo.

quindi attribuire, se non a Pitagora, ai primi pitagorici la costruzione della sezione aurea di un segmento dato e del pentagono regolare, tanto più che, come è noto, il pentagono stellato era il segno di riconoscimento dei pitagorici.

54. Proclo al commento della prop. 44 del I libro di Euclide e Plutarco attribuiscono ai pitagorici l'invenzione del problema *dell' applicazione delle aree*, considerando i due casi *in difetto* ed *in eccesso* come nel VI lib. degli Elementi di Euclide (prop. 28 e 29). Riportiamo qui il passo di Proclo per dichiarare il significato di queste parole: « Secondo Eudemo, le inven-« zioni riguardanti *l' applicazione, l' eccesso ed il difetto* « delle aree sono antiche e dovute ai pitagorici. I mo-« derni pigliando a prestito questi nomi, li trasferi-« rono alle così dette linee coniche, parabola, iper-« bole, ellisse; invece l'antica scuola nella sua nomen-« clatura relativa alla descrizione delle aree nel piano « su un segmento prendeva questi termini nel seguen-« te senso: un' area è detta *applicata* ad un dato « segmento rettilineo, quando sopra esso è descritta « un'area equivalente alla data; ma quando la base del-« l'area è più grande del dato segmento, allora l' area « si dice *in eccesso*, mentre se la base è minore, in modo « che una parte del dato segmento giace fuori della de-« scritta area, essa si dice *in difetto* ».

55. Plutarco attribuisce altresì a Pitagora il problema di costruire una figura equivalente ad una e simile ad un'altra figura data. La soluzione di questo problema dipende dall'applicazione delle aree e richiede, oltre la costruzione del segmento medio proporzionale fra due dati segmenti, la conoscenza dei teoremi: 1° i poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei loro lati omologhi; 2° se tre segmenti sono in proporzione geometrica, il primo sta al terzo, come il quadrato del primo sta al quadrato del secondo.

56. Non è da supporre che, distrutti i Sinedrî e morto Pitagora, sia scomparsa la filosofia pitagorica, poichè la scuola continuò a fiorire per ben altri due secoli. Sembra che la sede principale dell' insegnamento sia stata trasportata a Taranto; però in quasi tutte le più importanti città della Magna Grecia e della Sicilia s'insegnava la dottrina del filosofo di Samo.

57. Il più celebre fra' pitagorici a noi noti è ARCHITA DI TARANTO (428-347 a. C.), che non solo fu grande matematico, ma altresì savio legislatore ed esperto generale. Secondo Diogene Laerzio fu egli il primo che fece uso di un metodo scientifico nello studio della meccanica, applicandovi i principî della geometria. L'unico frammento della sua opera geometrica ci è stato conservato da Eutocio, il quale nel commento all'opera *De sphaera et cylindro* di Archimede riporta, fra le altre, la geniale soluzione di Archita del problema: costruire due segmenti medii proporzionali fra due segmenti dati. In questa soluzione egli fa uso dell' intersezione della superficie di un cilindro retto con quella di un cono retto, dandoci il primo esempio di un problema planimetrico risoluto mediante la stereometria.

58. Alla comunità pitagorica dovè appartenere un tal TIMARIDA, al quale Giamblico attribuisce la proposizione che se

$$x + x_1 + x_2 + \dots + x_n = S,\ x + x_1 = s_1,\ x + x_2 = s_2, \dots,$$
$$x + x_n = s_n$$

sarà
$$x = \frac{s_1 + s_2 + \dots + x_n - S}{n - 1}$$

Ciò che è importante in questa proposizione è l'uso della parola ἀόριστος per indicare la *quantità incognita.* S'ignora se Timarida facesse uso o pur no di un simbolo per indicarla, ma è certo che egli qui enuncia un teorema algebrico ed usa un'espressione algebrica.

59. Prima di terminare questo cenno sulla scuola pitagorica ci piace fare osservare ai giovani, pei quali

specialmente scriviamo questi cenni, che tutte le scoperte, delle quali la scienza è debitrice a Pitagora, quantunque importantissime, non formano però il principale titolo di questo Saggio alla gratitudine dell' umanità. Egli volle che le conoscenze acquisite con tanto lavoro e le dottrine da lui elaborate non andassero perdute, e dedicò tutto sè stesso alla formazione di una società di *eletti* per trasmettere la sua scienza, la sua filosofia. Divenne così uno dei principali benefattori dell' umanità, guadagnandosi la gratitudine di innumerevoli generazioni. I suoi discepoli provarono che erano degni della loro alta missione. La loro dignità morale appare evidente dalla loro massima degna di ogni ammirazione: *una figura ed un passo ma non una figura e tre oboli* cioè *la geometria per la geometria e non per l'utilità che se ne possa ricavare.* Che questa massima sia la guida dei giovani nello studio delle scienze!

La matematica nel V secolo a. C.

60. Il primo terzo del V sec. a. C., distrutta Mileto, la città rivale di Tiro e di Cartagine, soggiogata la Jonia al dominio dei Persi, bruciati i Sinedrî dei pitagorici a Crotone e nelle altre città della Magna Grecia, segnò un periodo di profonda oscurità e di dipendenza del popolo ellenico. Ma ben presto Atene si sollevò e, scacciati i Persiani dal suolo greco, liberato l'Egeo dalle navi dei Fenici e dei pirati, acquistò la supremazia in tutta la Grecia e, divenendo il centro del movimento intellettuale, iniziò il più memorabile periodo nella storia del mondo. Anassagora vi portò la filosofia jonica e fra' suoi discepoli annoverò Pericle ed Euripide; molti dei dispersi pitagorici vi trovarono rifugio: Parmenide e Zenone v'insegnarono la filosofia della scuola d'Elea, scuola quasi contemporanea della pitagorica, combattendo contro la pluralità ed il moto in sostegno dell'unità e dell'immutabilità dell'essere; eminenti insegnanti da ogni

parte dell' Ellade vi accorsero. Però mal sopportando lo spirito dei concittadini di Pericle alcun segreto, l'insegnamento dovette essere pubblico e così la Geometria e i diversi sistemi filosofici delle varie scuole vennero resi di pubblica ragione.

61. Ritornando alla storia della matematica, seguendo l'ordine indicatoci da Proclo nel Sommario di Eudemo, il primo matematico di cui dobbiamo parlare è ANASSAGORA DI CLAZOMENE, n. verso il 500 a. C. Alcuni storici lo pongono, dopo Talete, Anassimandro ed Anassimene, a capo della scuola jonica; ma ciò non è esatto, poichè egli in cambio di cercare l' origine di tutte le cose in qualche forma elementare della materia, pensò che una mente o intelligenza suprema, distinta dal mondo sensibile, avesse dato ordine e forma al caos della natura. Andato ad Atene giovanissimo, aprì pubblica scuola: accusato di empietà per le sue idee, fu condannato all'esilio, e ritiratosi a Lampsaco, città della Misia, vi morì verso il 428 a. C.

Incitato dai pitagorici allo studio della matematica, al dir di Plutarco, in prigione scrisse della quadratura del cerchio, ed al dir di Vitruvio sulla prospettiva, perfezionò i procedimenti per dipingere le scene dei teatri suggeriti da Agatarco all'epoca delle prime rappresentazioni delle tragedie di Eschilo: a noi però nulla è pervenuto delle sue scoperte. Con Anassagora la prima volta troviamo nella storia della matematica greca il famoso problema della quadratura del cerchio, problema che tante menti affaticò e nei tempi antichi e nei moderni.

62. Proclo e Platone annoverano fra' primi che in Grecia si occuparono di geometria OINOPIDE DI CHIO, che fiorì verso il 460 a. C., ma del quale possiamo solo dire che Proclo a lui ascrive la soluzione dei due problemi: 1°. da un punto esterno ad una retta data costruire la perpendicolare; 2°. su di una retta in un

suo punto costruire un angolo eguale ad un angolo dato.

63. Dobbiamo ancora menzionare DEMOCRITO DI ABDERA (460-370 a. C.), uno dei fondatori della scuola atomica, la quale cercava di conciliare le nozioni di unità e di pluralità, di quiete e di moto, dell'essere e del divenire, o, in una parola, la filosofia eleatica alla ionica. Superiore alla maggior parte dei suoi predecessori e contemporanei per la varietà delle sue conoscenze, per la penetrazione ed il vigor logico del suo spirito, collocato da Cicerone a lato di Platone pel suo stile elevato e poetico e per la chiarezza del suo dire, era un abile geometra e scrisse sulle linee incommensurabili, sui numeri e sulla prospettiva. Ma di queste opere a noi nessuna è pervenuta.

64. Un altro celebre problema presso i matematici greci era quello della trisezione di un arco o di un angolo, e questo in Proclo appare la prima volta collegato col nome di un tale IPPIA, il quale dev'essere IPPIA D'ELIDEA, il sofista, nato verso il 460 a. C. Egli, secondo Proclo, fu inventore di una curva trascendentale, che serve a dividere un arco in qualsiasi numero di parti eguali. Questa curva fu da Denostrato usata per la quadratura del cerchio, e di essa ci occuperemo in seguito.

65. Il terzo dei problemi che tanto contribuirono al progresso della matematica presso i primi geometri greci, è quello della duplicazione del cubo, cioè di trovare il lato di un cubo in volume doppio di un cubo dato, noto sotto il nome di *problema di Delo*, poichè, come ci racconta Eratostene, essendo quelli di Delo travagliati da una pestilenza, consultato l' oracolo, questo rispose che si dovesse raddoppiare l'altare che era un cubo d'oro.

IPPOCRATE DA CHIO che fiorì verso il 450 a. C., uno dei più grandi geometri dell'antichità, mostrò per primo che questo problema poteasi risolvere col trovare due

segmenti medî proporzionali fra il lato del dato cubo ed il doppio di esso lato, poichè dalla proporzione $a : x = x : y = y : 2a$, si ricava $x^3 = 2a^3$. Così il problema stereometrico si trasformava in planimetrico, senza però essere risolto, poichè Ippocrate non indicava il modo di risolvere questo secondo problema (1).

Ippocrate è anche celebre per la quadratura delle lunule, e le sue scoperte a tal riguardo ci furono conservate da Simplicio nel suo commento alla ***Fisica*** di Aristotele. Egli incomincia a quadrare una lunula particolare ragionando nel modo seguente: sul lato AC, del triangolo isoscele ACB (Fig. 10) inscritto nel semicerchio il cui diametro è la base AB, come diametro si descriva il semicerchio: essendo $AB^2 = AC^2 + CB^2 = 2\,AC^2$, e poichè i cerchi o i semicerchi stanno come i quadrati dei loro diametri (questo teorema è attribuito ad Ippocrate da Simplicio, sull' autorità di Eudemo, dalla cui storia è copiato il commento), il semicerchio ACB è il doppio del semicerchio descritto su AC, epperò il quadrante ACO è equivalente al semicerchio su AC: togliendo dall' uno e dall' altro la parte comune, resta il triangolo ACO equivalente alla lunula (μηνίσκος) compresa fra l'arco AC del semicerchio ACB e il semicerchio su AC.

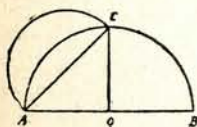



Fig. 10

Ippocrate prosegue quadrando altre lunule, e quantunque, com'è naturale, non può pervenire alla quadratura del cerchio, il suo tentativo fu di stimolo allo studio di questo importante problema. Egli, oltre il teorema innanzi citato sul rapporto di due cerchi, provò altresì che segmenti simili di un cerchio stanno fra loro come i quadrati delle rispettive corde; che segmenti si-

(1) Abbiamo innanzi fatto cenno della soluzione di questo celebre problema, attribuita ad Archita.

mili contengono angoli eguali; che l'angolo inscritto in un arco maggiore o minore di una semicirconferenza è acuto od ottuso; che in un triangolo il quadrato di un lato è minore o maggiore della somma dei quadrati degli altri due lati, secondo che l'angolo opposto al primo lato è acuto od ottuso; e finalmente che in un triangolo isoscele, il cui angolo al vertice è doppio dell'angolo di un triangolo equilatero, il quadrato della base è il triplo del quadrato di uno dei lati eguali.

Ad Ippocrate si attribuisce altresì il merito di avere scritto un libro sugli *Elementi di Geometria.*

A lui inoltre si attribuisce l' introduzione dell' uso di indicare con lettere dell' alfabeto i punti principali delle figure per facilitarne le dimostrazioni. Devesi però notare che i pitagorici erano soliti di indicare i vertici del pentagono stellato ordinatamente con le lettere υ, γ, ι, θ (= ει), α, che formano la parola ὑγίεια *(salute).*

66. Col medesimo problema della quadratura del cerchio sono collegati i nomi di Antifonte, il sofista, e Brisone di Eraclea, entrambi contemporanei d'Ippocrate.

Antifonte inscriveva in un cerchio un quadrato, poi, bisecando successivamente gli archi, i poligoni regolari di 8, 16, 32, ecc. lati; otteneva così una serie di poligoni tali che ciascuno differisce dal cerchio meno dell'antecedente: egli quindi concludeva che si poteva pervenire ad un poligono, il cui perimetro coincidesse con la circonferenza; e poichè si sa quadrare un qualsiasi poligono, si potrà così trovare un quadrato equivalente all'ultimo poligono inscritto e quindi al cerchio.

Brisone faceva fare un considerevole passo al problema della quadratura del cerchio, considerando i poligoni regolari inscritti e circoscritti. Però errava assumendo l'area del cerchio come media aritmetica fra le aree dei poligoni inscritto e circoscritto.

67. I procedimenti di Antifonte per la quadratura

del cerchio si collegarono ad una questione filosofica largamente discussa in quel tempo. Tutti i geometri greci, per quanto sappiamo, negavano la possibilità della coincidenza di un poligono col cerchio, poichè una retta non può coincidere con una circonferenza o con una parte di questa. Se un poligono potesse coincidere con un cerchio, allora, dice Simplicio, si dovrebbe ammettere che le grandezze potessero venire divise *ad infinitum*, questione questa importantissima, la cui discussione in Atene esercitò un' influenza capitale sullo sviluppo della geometria, specialmente in ciò che riguardava il metodo. La scuola Eleatica, con a capo il grande dialettico Zenone, combattè la divisibilità all'infinito di una linea o di qualsiasi altra grandezza, e la proposizione di Zenone è stata praticamente accettata da Antifonte nel suo supposto che la retta e la curva potessero in ultimo ridursi al medesimo indivisibile elemento. Zenone ragionava mediante la *reductio ad absurdum* contro la teoria della divisibilità all' infinito, sostenendo che se ciò fosse esatto, Achille non potrebbe raggiungere la tartaruga, se questa stesse innanzi a lui. Infatti, egli diceva, mentre Achille percorre lo spazio che lo separa dalla tartaruga, questa a sua volta percorre un certo spazio allontanandosene, e mentre Achille percorre questo secondo spazio, la tartaruga ne percorre un altro, e così di seguito, e quindi Achille per raggiungerla, dovrebbe percorrere ciascuno degli infiniti spazi percorsi dalla tartaruga, epperò egli non potrebbe mai raggiungerla (1). Ma è un fatto ch'egli la raggiunge; dunque devesi concludere ch' è assurdo supporre che la distanza possa

(1) Facilmente si vede dove sta l' errore nel ragionamento di Zenone. Poichè uno spazio infinitesimo è percorso in un tempo infinitesimo, una lunghezza finita, che può considerarsi composta di una infinità di parti infinitesime, è percorsa in un tempo finito, somma degli infiniti tempuscoli infinitesimi necessari per percorrere le infinite parti infinitesime di essa lunghezza.

essere divisa in un numero infinito di parti. Questo sofisma, discutendo la divisibilità all' infinito e quindi anche la infinita multiplicità di parti, tenne grandemente perplessi i matematici contemporanei, i quali per evitare che i progressi della matematica fossero impediti dalla dialettica, vollero bandire dalla loro scienza l'idea dell'*infinitamente piccolo* e dell'*infinitamente grande* ed ammisero che *una grandezza possa essere divisa in qualsiasi numero di parti eguali* e che *se due grandezze sono diseguali, esista un multiplo della loro differenza, il quale superi una data grandezza.* Non vi può essere quindi alcuna differenza infinitamente piccola, poichè questa ripetuta un numero limitato di volte non può mai superare una quantità finita. Inoltre per evitare ogni possibile critica dei dialettici, i matematici vollero che ogni teorema, anche se la sua verità fosse evidente ai sensi, venisse rigorosamente dimostrato. Così l' influenza dei dialettici, quantunque non matematici, apportò nella geometria un maggiore rigore.

68. Inoltre i sopradetti procedimenti di Antifonte e di Brisone iniziarono il *metodo di esaustione,* perfezionato poi da Eudosso. Questo metodo può considerarsi come contenuto nelle due seguenti proposizioni: 1° se A e B sono due grandezze della stessa specie ed è $A > B$, togliendo da A più della sua metà, e dal resto più della sua metà e così di seguito, si otterrà infine un resto minore di B; 2° Se P e Q sono due grandezze della stessa specie e se la serie di grandezze $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$ tende verso P, ovvero è tale che la differenza fra una di esse X_n e P è minore della metà della differenza fra l'antecedente X_{n-1} e P; se $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ è un'altra serie di grandezze che tendono analogamente verso Q, e se infine $X_1 : Y_1 = X_2 : Y_2 = \ldots = A : B$, sarà ancora $P : Q = A : B$. Infatti, posto che le grandezze X siano tutte minori di P e le Y tutte minori di Q, se il rapporto $A : B$ non è eguale al rapporto $P : Q$, suppongasi

che sia $A : B = P : R$, ove R è una grandezza maggiore o minore di Q. Sia $R < Q$.

Per le ipotesi e per la prima proposizione nella serie Y si troverà una grandezza p. es. Y_n tale che sia $Q - Y_n < Q - R$ e quindi sarà $Y_n > R$. Ma si ha $X_n : Y_n = A : B$, $A : B = P : R$, quindi $X_n : Y_n = P : R$, ed essendo $X_n < P$, dovrebbe essere anche $Y_n < R$, il che è assurdo. Analogamente si dimostra che se è $R > Q$, la proporzione $A : B = P : R$ è assurda; quindi si conclude che dovrà essere $A : B = P : Q$.

69. Nessun problema matematico è stato studiato con tanta assiduità e perseveranza dai Greci, dagli Arabi ed anche dai matematici della Rinascenza quanto i tre celebri problemi di cui abbiamo fatto cenno, cioè la trisezione dell' angolo, la duplicazione del cubo e la quadratura del cerchio. Ad essi volsero la mente e saggi e folli, tutti studiandosi a vincerne le difficoltà che presentavano. Alla fine però s'intuì che questi problemi non ammettono soluzione, ponendosi la limitazione stabilita dai Greci, che i problemi geometrici devonsi risolvere mediante costruzioni da eseguirsi col solo uso della riga e del compasso, ed una tale intuizione è stata poi confermata da rigorosa dimostrazione.

Pei Greci una costruzione nella quale si faccia uso di ellissi, iperboli, parabole od altre curve di ordine superiore, non era *geometrica,* ma meccanica, ed è perciò che non erano soddisfatti dalle soluzioni che pur essi possedeano dei detti problemi mediante altre curve diverse dal cerchio. E qui sorge la domanda: perchè i Greci nelle costruzioni geometriche ammettevano il cerchio ed escludevano l' ellisse, l' iperbole, la parabola, che sono curve del medesimo ordine del cerchio? Rispondiamo con le parole del Newton: « Il motivo che « deve far preferire una curva ad un' altra, per la co« struzione di un problema, non è la semplicità della « sua equazione, ma la facilità con la quale si può de-

« scriverla. Infatti, l' equazione della parabola è più
« semplice di quella del cerchio; e frattanto tutte
« le volte che si può, si preferisce il cerchio, perchè la
« sua descrizione è più facile. Se si considerano il cer-
« chio e le sezioni coniche sotto il rapporto delle di-
« mensioni delle loro equazioni, si debbono classificare
« nel medesimo ordine; ma ciò non si fa, poichè il cer-
« chio nella costruzione dei problemi, è messo nel me-
« desimo posto della retta a causa della facilità della
« sua descrizione; di maniera che si può, senza peccare
« contro la regola, costruire, mediante il cerchio, un pro-
« blema che si potrebbe egualmente costruire con la
« retta. Si peccherebbe invece se si costruisse mediante
« le sezioni coniche un problema che si può costruire
« mediante un cerchio » (1).

L'Accademia.

70. Dopo la guerra del Peloponneso (431-404 a. C.) la potenza politica di Atene declinò, ma essa mantenne ancora la supremazia nelle scienze e nelle arti, specialmente per opera di PLATONE, il cui genio influì sul pensiero filosofico di tutti i tempi. Questi nacque da ricca e distinta famiglia in Atene il 429 a. C. e morì nel 348. Per le condizioni della sua famiglia potè fruire di tutti i mezzi di educazione che la sua patria offriva. Fra' suoi maestri si annovera Socrate; ma egli non derivò il suo entusiasmo per la matematica dall'insegnamento di Socrate, poichè questi, secondo Senofonte e Diogene Laerzio, inculcava di doversi apprendere tanto di geometria e di astronomia quanto è necessario pe' bisogni giornalieri, per saper misurare un pezzo di terreno, per saper conoscere l'ora del giorno.

---

(1) *Arithmétique universelle de* NEWTON *traduite du latin en français par* N. BEAUDEUX. T. II, Paris, 1802, pag. 54.

Dopo la morte di Socrate intraprese dei viaggi ed ebbe così occasione di conoscere molti pitagorici, i quali lo appassionarono per la loro scienza favorita, la matematica. Anch'egli visitò l'Egitto e poi a Cirene, studiò con Teodoro pitagorico, nominato con lode nel sommario di Eudemo (1); venuto indi nella Magna Grecia ed in Sicilia (nel 389 a. C.), s'incontrò con Archita e con Timeo di Locri, coi quali strinse legami d' intima amicizia. Si vuole inoltre che da Filolao abbia egli comprato tre libri, nei quali erano esposte le teorie della scuola del filosofo di Samo. Ritornato ad Atene, riunì intorno a sè molti studiosi, i quali ascoltavano i suoi discorsi nei giardini di *Accademo* siti fuori della città, e così surse la celebre scuola dell'*Accademia*.

71. La filosofia fisica di Platone, derivata dalla pitagorica, cercava di spiegare i fenomeni dell' universo coll'Aritmetica e colla Geometria. Egli diceva, come ci riferisce Plutarco, che Dio è un gran geometra, e riteneva che la conoscenza della geometria fosse indispensabile per chi volesse studiare la filosofia; anzi si racconta che avesse scritto sul portico della sua scuola « nessuno che ignori geometria entri per la mia porta ».

Platone occupa un posto nella storia della matematica anche per aver sostenuto vigorosamente che l'insegnamento della scienza esatta è di capitale importanza per l' educazione della mente, opinando altresì essere necessario che lo Stato imponga l'insegnamento della matematica non solo a chi voglia occupare uffici nel governo della cosa pubblica, ma a tutti i fanciulli, maschi o femmine, liberi o schiavi. Inoltre principale suo merito è di aver trasformata la logica intuitiva dei primi geometri in un metodo rigoroso, scientifico. E con

---

(1) Platone nel suo dialogo *Teeteto* introduce per lo appunto Teodoro di Cirene, al quale attribuisce la scoperta che le radici quadrate dei numeri compresi fra 2 e 17 (eccetto 4, 9 e 16) sono irrazionali.

lui, infatti, appariscono le accurate definizioni de' termini geometrici, le quali trovansi in Euclide, come pure la precisa distinzione dei postulati dagli assiomi. Aristotele ci dice che Platone definiva il punto *il principio di una linea* ovvero *una linea indivisibile;* ed ai tempi di Aristotele erano già in uso le definizioni: il punto, la linea, la superficie sono rispettivamente i limiti della linea, della superficie, del solido; una linea è lunghezza senza larghezza; retta è quella linea il cui punto medio nasconde un estremo (se l' occhio è collocato all' altro estremo). Forse non tutte queste definizioni sono dovute a Platone, al quale invece Proclo e Diogene Laerzio attribuiscono il metodo di dimostrazione mediante l' *analisi;* non potendosi però supporre che questo metodo fosse ignorato dai geometri anteriori, si ammette che a Platone spetti il merito di aver introdotto in Geometria l' analisi come metodo rigoroso e di aver date regole per usarlo.

72. La più antica definizione del metodo analitico in opposizione al metodo sintetico è data da Euclide nel suo lib. XIII, prop. 5, forse presa da Eudosso. I Greci distinguevano due diverse specie di analisi: una di esse è la *reductio ad absurdum*, la sola che trovasi negli *Elementi* di Euclide e che è del tenore seguente. Sia da dimostrare che « A è B ». Assumiamo che sia A *non* B, e mediante la sintesi deduciamo: *non* B è C, C è D, D è E; se ora A è *non* E, è assurdo che sia A *non* B, epperò A è B. Accanto a questa è l' analisi *teoretica*. Per provare che A è B, assumiamo che ciò sia, allora si deduce che B è C, C è D, D è E, E è F; quindi A è F. Se questa ultima proposizione è falsa, allora A è *non* B; ma se vera, non si può concludere che A è B, prima di aver dimostrato che tutte le proposizioni intermedie ammettono le rispettive inverse, cioè A è F, F è E, E è D, D è C, C è B; quindi A è B. Il procedimento inverso costituisce una dimostra-

zione sintetica del dato teorema, ed il procedimento analitico ha per lo appunto lo scopo di indicare la via per quello sintetico. Di maggiore importanza presso i Greci era l'analisi *problematica*, la quale invece era applicata nel caso in cui si richiede la costruzione di una figura che deve sodisfare date condizioni; ed il procedimento consiste nel costruire una figura che si suppone sia la richiesta, convertendo il problema in un teorema che comprende le date condizioni e che si dimostra sinteticamente: invertendo il ragionamento sintetico, si ha la soluzione sintetica del problema.

I geometri greci dopo l' analisi non trascuravano mai la sintesi. Il problema poteva essere impossibile sotto alcune condizioni, le quali erano poste in evidenza dall'analisi, e quindi i Greci alla soluzione sintetica aggiungevano, se era il caso, il così detto *diorisma*, ossia la determinazione delle condizioni per le quali il problema è o non possibile. Proclo ascrive l'invenzione del diorisma a Leone il Platonico; ma devesi osservare che in un importante passo del dialogo *Menone* si contiene una specie di diorisma che certamente appartiene a Platone; quindi è molto probabile che l'intera sistemazione del metodo analitico sia dovuta al fondatore dell'Accademia.

73. Platone si occupò anche del celebre problema di Delo, e la sua soluzione riportata da Eutocio nel commento innanzi indicato è l' unico contributo diretto all'incremento della geometria che di lui possediamo.

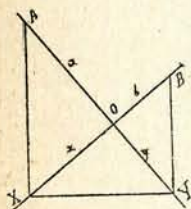



Fig. 11.

Ricordando che Ippocrate di Chio ha convertito il detto problema in quello della inserzione di due segmenti medî proporzionali fra due segmenti dati, la soluzione di Platone è la seguente. Se a, b sono i segmenti dati ed x, y i due medî da inserire, cioè se $a : x = x : y = y : b$, si prendano sopra due rette

ortogonali (Fig. 11) a partire dal loro punto d'incontro O sull'una i segmenti $OA=a$, $OY=y$, e sull'altra i segmenti $OB=b$, $OX=x$: i triangoli AOX, XOY, YOB saranno simili e perciò gli angoli AXY, XYB retti. Quindi una soluzione del problema si otterrà, se si potrà costruire un segmento XY, i cui estremi stiano sui lati dell'angolo retto XOY in modo che le perpendicolari ad esso condotte nei punti estremi passino l'una per A e l'altra per B. Ed Eutocio descrive un piccolo strumento costruito a tale scopo da Platone; però devesi osservare che Plutarco racconta che Platone biasimava le soluzioni di questo problema date da Archita, da Eudosso, da Menecmo, nelle quali faceasi uso di mezzi meccanici « perchè così le bellezze della geometria vengono oscu- « rate e tolte, riconducendola allo stato pratico, invece « di elevarla in alto, di fare come oggetto di essa le « figure eterne ed incorporee ». Alcuni perciò ritengono apocrifa detta soluzione.

74. Platone diede anche un forte impulso allo studio della stereometria, che fino al suo tempo era quasi negletta; e fra' primi geometri che si occuparono dei solidi troviamo EUDOSSO DI CNIDO (408-355 a. C.), il padre, come è stato chiamato, dell'astronomia scientifica. Anch'egli viaggiò in Egitto, studiò con Archita e per poco tempo anche con Platone, ed indi fondò a Cizico una scuola la quale contribuì moltissimo al progresso della geometria. Da notizie di scrittori posteriori l'Ideler e lo Schiaparelli riuscirono a ricostruire il sistema astronomico di Eudosso con la sua celebre rappresentazione dei moti dei pianeti mediante sfere concentriche. Diogene Laerzio lo descrive non solo come abile astronomo e geometra ma anche come fisico e legislatore. Nel Sommario di Eudemo si legge: « Eudosso di Cnido accreb- « be per primo il numero dei teoremi detti generali, ag- « giunse tre nuove proporzioni alle tre antiche, e ser- « vendosi del metodo analitico fece progredire quanto

« Platone avea intrapreso intorno alla sezione ». Qui per *sezione* intendesi la *sezione aurea* di un segmento, ed a lui sono attribuite le prime 5 proposizioni del libro XIII di Euclide (1). A lui è anche attribuito il contenuto del V libro. Inoltre Archimede nell'introduzione della sua opera *De sphaera et cylindro* dice che Eudosso dimostrò che una piramide è la terza parte del prisma e un cono la terza parte del cilindro della stessa base e della stessa altezza. E poichè queste proposizioni furono da Eudosso dimostrate col metodo dell'esaustione, è probabile ch'egli collo stesso metodo abbia dimostrato che le sfere stanno come i cubi dei loro raggi. Eudosso si occupò ancora del problema di Delo, ma ignoriamo quale sia stata la sua soluzione.

75. Platone può ben chiamarsi il maestro dei matematici, ed il *Sommario* di Eudemo annovera fra' suoi discepoli non pochi che hanno contribuito al progresso della geometria.

Leggiamo nel detto *Sommario*: « LEODAMANTE DI TASO e TEETETO D'ATENE aumentarono il numero dei teoremi e ne resero più scientifico l'insieme ». Al primo Platone comunicò il suo metodo analitico, dal nome del secondo intitolò uno dei suoi dialoghi; Teeteto si occupò dello studio delle grandezze incommensurabili e, secondo Suida, scrisse sui 5 poliedri regolari. « NEOCLIDE, più giovane di Leodamante, ed il suo discepolo LEONE aggiunsero molte proposizioni alle già conosciute, in modo che Leone potè comporre un libro sugli *Elementi* molto pregiato per il numero e pel valore delle dimostrazio-

---

(1) Queste proposizioni sono enunciate dalle seguenti relazioni: se a è un segmento rettilineo, b la sua sezione aurea e $c = a - b$; 1º sarà $\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{a}{2}\right)^2$; 2º inversamente, se questa relazione si verifica, b è la sezione aurea di a; 3º $\left(c + \frac{b}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{b}{2}\right)^2$; 4º $a^2 + c^2 = 3b^2$; 5º $b(a + b) = a^2$.

ni; egli altresì scoperse il *diorisma* ». « AMICLA D'ERACLEA, condiscepolo di Platone, perfezionò nel suo complesso la geometria ». « TEUDIO DI MAGNESIA si acquistò singolare riputazione nella matematica e nelle altre branche della filosofia; compose eccellenti *Elementi* e rese più generali parecchie proposizioni particolari ». « Alla medesima epoca visse CIZICENO DI ATENE che fu celebre come matematico ». « ERMOTIMO DI COLOFONE sviluppò le scoperte di Eudosso e di Teeteto, trovò diverse proposizioni degli Elementi e compose un'opera sui *Luoghi* ». « FILIPPO DI MENDE, discepolo di Platone, fece delle ricerche seguendo le indicazioni del suo maestro, essendosi altresì proposto d'illustrare con esempî geometrici la filosofia platonica ».

Con Filippo finisce l' elenco dei geometri greci nel periodo pre-euclideo conservatoci da Proclo nel sopradetto *Sommario*. Prima però di chiudere questo capitolo dobbiamo ancora parlare di Menecmo e di suo fratello Dinostrato.

76. A MENECMO, discepolo di Eudosso e suo successore nella direzione della scuola di Cizico, si attribuisce il merito di avere scoperta la geometria delle sezioni coniche, le quali dopo furono qualche volta anche chiamate *la triade di Menecmo*. Gemino, secondo Eutocio nel Commento alle Coniche di Apollonio, ci dice che Menecmo, sezionando con un piano perpendicolare ad un lato i tre coni retti, il rettangolo, l'acutangolo e l'ottusangolo, ricavava le tre curve coniche, cioè la parabola, l'ellisse e l'iperbole da lui denominate rispettivamente sezione del cono rettangolo, sezione del cono acutangolo, sezione del cono ottusangolo (1).

---

(1) Sezionando un cono retto con un piano passante per l' asse, si ottiene un triangolo isoscele, detto *triangolo d'asse*. Secondo che l' angolo al vertice di questo triangolo è retto, acuto od ottuso, il cono dicevasi rettangolo, acutangolo od ottusangolo.

Egli deve avere scoperte le principali proprietà di queste tre curve, come chiaramente appare esaminando le due sue eleganti soluzioni del problema di Delo conservateci da Eutocio. Menecmo, avendo osservato che se $a : x = x : y = y : b$, si ha $x^2 = ay$ ed $y^2 = bx$, costruiva due parabole (Fig. 12) col vertice comune C, l'una con parametro a ed asse AC, l'altra con parametro b ed asse BC perpendicolare ad AC, ed otteneva nel loro punto d'intersezione P la soluzione del problema, poichè le coordinate CX e CY di P sono eguali ai due segmenti medii proporzionali richiesti x ed y. Egli, osservando che si ha pure $xy = ab$, otteneva ancora il medesimo punto P come intersezione di una delle dette parabole con l'iperbole i cui asintoti siano CX e CY, e tale che, assumendo come assi delle coordinate gli asintoti, il rettangolo delle coordinate di un suo punto sia eguale ad ab. Di Menecmo non è a noi pervenuto alcuno scritto e di lui conosciamo solo le due su riferite soluzioni. Devesi però osservare che non a lui, ma ad ARISTEO SENIORE, che visse verso il 320 a. C., è attribuita la prima opera sulle coniche in 5 libri, dalla quale trasse grande profitto Euclide nel compilare la sua opera sulle sezioni coniche (1).

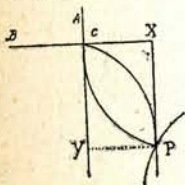



Fig. 12.

77. Un altro grande matematico di quell'epoca fu DINOSTRATO, fratello di Menecmo. Di lui però sappiamo solo che per la quadratura del cerchio usò la curva che Ippia avea trovato per la trisezione dell'ar-

(1) VINCENZO VIVIANI (1622-1703), celebre discepolo di Galileo, spese quasi tutta la sua vita per ricostruire coi pochissimi dati posseduti sulla vita e sulle opere di Aristeo i 5 libri sulle coniche, e a Firenze nel 1701 pubblicò il suo importante studio *De locis solidis secunda divinatio geometrica in quinque libros injuria temporum amissos Aristaei Senioris geometrae.*

co, e che perciò fu denominata la *quadratrice*, quantunque essa non ci dia direttamente che la rettificazione della circonferenza. Questa curva è così generata: dato il quadrato $ABCD$ (Fig. 13), si faccia muovere con moto uniforme il lato AB intorno al punto fisso A fino a coincidere col lato AD in modo che il punto B descriva il quadrante BED, e contemporaneamente anche con moto uniforme si faccia muovere il lato BC parallelamente a se stesso fino a coincidere con AD nello stesso tempo che AB: le rette AB e BC in ogni loro posizione s'incontreranno in un punto, mobile insieme ad esse, il cui luogo è la quadratrice BFG. La proprietà di questa curva è la seguente: se F e F' sono due punti della curva, si ha: ang. DAE : ang. $DAB = AH : AB$, ang. DAE' : ang. $DAB = AH' : AB$, da cui ang. DAE : ang. $DAE' = AH : AH'$. Perciò dato un angolo acuto DAE, dividendo il segmento AH in H' secondo un dato rapporto, il raggio AF' dividerà nel medesimo rapporto l'angolo dato.

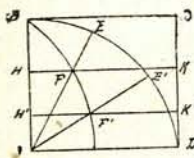



Fig. 13.

La rettificazione della circonferenza si ottiene dalla medesima curva, poichè il segmento eguale al quadrante BED è terzo proporzionale dopo AG, AD.

Bisogna osservare che questa curva risolve teoreticamente il problema della rettificazione della circonferenza, e quindi anche quello della quadratura del cerchio, poichè non possiamo descriverla con moto continuo.

78. Non possiamo chiudere questo capitolo, che riguarda i progressi che la matematica deve alla scuola fondata da Platone, senza fare un cenno del grande filosofo che per circa 20 secoli imperò su ogni branca dello scibile umano. ARISTOTELE (384-322 a. C.) ha diritto ad un posto d'onore anche nella storia della matematica, sia per aver egli sistemato la logica deduttiva, sia per-

chè a lui appartengono alcune delle più difficili definizioni geometriche. Egli per primo usò le lettere dell'alfabeto per indicare quantità indeterminate, quantunque non a scopo di calcolo; nella sua *Fisica* si riscontra il germe del principio delle velocità virtuali. A lui alcuni attribuiscono un'opera sulla Meccanica, nella quale è applicata la geometria allo studio delle macchine.

CAPITOLO VI.

PERIODO AUREO DELLA GEOMETRIA GRECA.

79. Il periodo, di cui ora tratteremo, nel quale fiorirono i tre più grandi matematici greci, Euclide, Archimede, Apollonio, è da alcuni chiamato periodo *greco-alessandrino,* poichè il centro della cultura scientifica da Atene passò in Alessandria, la città che, fondata da Alessandro Magno, divenne ben presto la più nobile di tutte. A questo periodo il Loria nella sua geniale opera « Le scienze esatte nell'antica Grecia » dà bene a ragione l'appellativo di *aureo*, segnando esso il massimo splendore delle scienze nel mondo antico.

Atene già decadeva dalla sua grandezza negli anni che immediatamente seguirono la guerra Pelloponnesiaca, quando vide sorgere i più grandi filosofi dell'antichità, Platone ed Aristotele: con la battaglia di Cheronea (338 a. C.) Filippo il Macedone spezzava per sempre la potenza della bella città, ove il genio di Fidia avea scolpito il suo nome nello stupendo tempio del Partenone. Subito dopo Alessandro il Grande moveva alla conquista del mondo ed in pochi anni fondava un impero che si estendeva dalla Macedonia all'Indo, dal Caspio alle cateratte del Nilo, impero che poi sfasciavasi in breve tempo. L'Egitto cadeva in potere di Tolomeo Sotero, il fondatore della dinastia dei Lagidi, benemerita della scienza: Alessandria diveniva la capitale del nuovo Stato e la storia dell'Egitto durante i tre secoli successivi era principalmente la storia di essa. Ivi con diligenza erano coltivate la letteratura e la filosofia, le

scienze e le arti. Tolomeo I ed il suo successore Tolomeo Filadelfo vi creavano il *Museo*, fondavano la grande Biblioteca, fabbricavano laboratorî, un giardino zoologico ed amene passeggiate, ed Alessandria diveniva ben presto non solo l' emporio del commercio fra l'occidente e l' oriente ma altresì un gran centro da cui s'irradiava il sapere.

80. Demetrio Falereo Ateniese era invitato ad Alessandria per curare la Biblioteca ed è probabile che con lui fosse anche invitato EUCLIDE per aprirvi una scuola di matematica. Il periodo della più grande attività di Euclide coincide col tempo del primo Tolomeo, che regnò dal 306 al 283 a. C. Ben poco sappiamo della sua vita: Proclo al *Sommario* di Eudemo aggiunge che Euclide era posteriore ai discepoli di Platone ed anteriore ad Eratostene ed Archimede; che era di opinioni platonico; che negli *Elementi* ordinò molte proposizioni trovate da Eudosso, completò molte cose di Teeteto e fu il primo a ridurre gl'imperfetti tentativi dei suoi predecessori a rigorose dimostrazioni. Quando Tolomeo una volta gli domandò se per apprendere la geometria vi fosse una via più breve degli *Elementi*, ne ebbe per risposta: « In Geometria non esistono cammini speciali fatti per i re ». Pappo dipinge Euclide modesto, di carattere dolce e pieno di benevolenza verso chiunque fosse in grado di far progredire la matematica. Stobeo racconta di Euclide questo aneddoto un giovane che avea incominciato a studiare la geometria con Euclide, dopo di avere apprese le prime cinque proposizioni, chiese: Che cosa guadagnerò io apprendendo queste cose? Euclide allora chiamò il suo schiavo e disse: Dà a costui tre danari, poichè deve guadagnare per quello che apprende. Queste poche notizie sono le sole che intorno ad Euclide si trovano in scrittori greci, mentre abbondano di particolari gli scrittori siriaci ed arabi, ai quali però non si può prestar fede. Vi fu un

tempo in cui Euclide d'Alessandria era universalmente confuso con Euclide di Megara, il quale visse un secolo prima.

81. Euclide deve principalmente la sua fama e nei tempi antichi e nei moderni ai suoi *Elementi* (στοιχεῖα), i quali erano tanto superiori a quelli compilati da Ippocrate, Leone e Teudio da farli completamente dimenticare. Per quest'opera Euclide avea presso i Greci acquistato il titolo speciale di *autore degli Elementi;* ed è degno di nota che anche dopo 20 secoli quest'opera è riguardata da molti come la migliore introduzione allo studio della matematica. Si è però attribuito ad Euclide più di quanto gli è dovuto, poichè da alcuni fu creduto che tutto un sistema geometrico fosse uscito bello e completo dalla sua mente come Minerva armata dalla testa di Giove, non tenendo egli alcun conto dei primi eminenti matematici da cui prese il materiale per l'opera sua; mentre ben poche delle proposizioni e delle dimostrazioni che troviamo negli *Elementi* sono a lui propriamente dovute, e Proclo ascrive direttamente a lui la sola dimostrazione del teorema pitagorico. Inoltre la sostanza dei libri I, II, IV deriva dai pitagorici, quella dei libri V e VI dai pitagorici e da Eudosso, e questi ha ancora contribuito non solo alla teoria delle proporzioni applicata alle grandezze incommensurabili, ma ancora al metodo di esaustione (lib. XII); Teeteto ha portato il suo contributo a riguardo dei libri X e XIII, ed Euclide inoltre si è dovuto non poco valere degli studî di tutti i matematici anteriori, dei quali abbiamo fatto cenno nelle pagine antecedenti. Il merito reale di Euclide è di essere stato il più grande sistematore del suo tempo per l'accurata selezione di quanto i suoi predecessori aveano trovato e per la disposizione strettamente logica delle scelte proposizioni: su poche definizioni e su pochi assiomi egli seppe fabbricare coi suoi *Elementi* un superbo edifizio che ha sfidato i

secoli. Non tutti sono però di accordo in riguardo al merito degli *Elementi* come trattato scientifico, riguardandoli alcuni come opera il cui rigore scientifico è in ogni punto perfetto e superiore ad ogni critica, attribuendo i difetti che vi si riscontrano ai primi editori; giudicandoli altri molto severamente. E gli uni e gli altri pronunziano un giudizio non esatto (1).

82. Gli *Elementi* contengono 13 libri ed inoltre 2 che si suppone siano stati composti il XIV da Ipsicle ed il XV da Damascio e da altri. Nel I dopo le definizioni del punto, della linea, ecc., che in vero sarebbero dei postulati, seguono tre postulati ed indi 12 assiomi o, come Euclide li chiama, *nozioni comuni*. Intorno a questi e fra gli antichi e fra' moderni sorsero dispute, poichè gli assiomi 11 e 12 (tutti gli angoli retti sono eguali; se due rette incontrate da una terza formano con questa due angoli interni la cui somma sia minore di due retti, esse prolungate s'incontreranno dalla banda della terza retta rispetto alla quale la somma degli angoli interni è minore di due retti) secondo molti manoscritti, ed anche secondo la testimonianza di Proclo, andrebbero collocati fra' postulati, ove troverebbero in vero il loro posto naturale. L'assioma 12mo noto sotto il nome di *postulato delle parallele* gode nella geometria un posto speciale, poichè da esso ebbe origine la *geometria non-euclidea*. Non possiamo qui esaminare il contenuto dei 13 libri per non uscire dai limiti assegnati; diremo solo che i primi 4 libri trattano della proprietà delle figure piane, cioè dei poligoni e del cerchio; il 5^{o} è dedicato alla teoria delle proporzioni applicata alle grandezze

---

(1) Leggasi al riguardo l'importante monografia del LORIA, *Della varia fortuna di Euclide in relazione coi problemi dell'insegnamento geometrico elementare*, (*Period. di mat.*, an. VIII, 1893).

in generale; il 6° considera le figure simili; il 7°, l'8° e il 9° trattano la teoria dei numeri, e propriamente nel 7° trovasi p. es. il procedimento per la ricerca del massimo comun divisore e del minimo multiplo comune di due o più numeri, nell'8° e nel 9° si studiano i numeri in proporzione continua e con le mutue relazioni di quadrati e cubi; nel 10° sono studiate le quantità incommensurabili e la teoria di queste quantità rimase inalterata nel modo come era stata concepita da Euclide fino al 15° sec.; nell'11° trovansi i primi teoremi di stereometria; nel 12° le relazioni metriche della piramide, del prisma, del cono, del cilindro e della sfera; nel 13° lo studio dei poliedri regolari. La forma con la quale sono compilate le dimostrazioni forse appartiene ad Euclide. Innanzi tutto vi è l'enunciato generale, indi l'enunciato particolare sulla figura, segue poi, se è necessario, la costruzione di linee ausiliarie per la dimostrazione, indi la dimostrazione ed infine la conclusione con la chiusa *Q. E. D.*, (ὅπερ ἔδει δεῖξαι) o se trattasi di problema *Q. E. F.* (ὅπερ ἔδει ποιῆσαι).

Osserviamo infine che gli *Elementi*, come tutta la Geometria greca prima di Archimede, non si occupano delle misure, e che perciò in essi non si trova p. es. il teorema che l'area di un triangolo è eguale al semiprodotto dei numeri che misurano la base e l'altezza.

Nel XII secolo dell'E. V. Athlard di Bath tradusse la prima volta in un latino barbaro gli elementi di Euclide da una traduzione in arabo da lui trovata forse nella Spagna. Nel 1482 fu pubblicata a Venezia la traduzione di Athlard con il commento di Campano, ed è questa la prima opera di geometria che si è pubblicata per la stampa e la prima edizione degli *Elementi* di Euclide. In seguito questi elementi furono ripubblicati moltissime volte ed in tutte le lingue: qui accenneremo solamente all'ultima edizione col testo greco e la tradu-

zione in latino pubblicata a Lipsia per cura di I. L. Heiberg (1).

83. Un' altra opera di Euclide è intitolata i *Data* scritta per quelli che, avendo già studiati gli *Elementi*, vogliano mettersi in condizione di risolvere nuovi problemi, ed è una specie di pratica in *analisi*. Secondo Euclide una cosa è *data*, quando sono assegnate certe condizioni sufficienti a determinarla, e può essere data *in ispecie*, come un poligono simile ad un altro, o in *posizione*, come il punto comune a due rette date, o in *grandezza*, come un cerchio di dato raggio.

Ad Euclide sono ancora attribuite: Φαινόμενα, un'opera astronomica e sulla geometria sferica; 'Οπτικά, opera nella quale sviluppa l' ipotesi che la luce emani dall'occhio e non dall'oggetto visto; Κατοπτρικά, opera che contiene delle proposizioni sulla riflessione della luce; Κατατομὴ Κάνονος, opera sugl'intervalli musicali; ed un'opera *De divisionibus* a noi pervenuta nella sua traduzione araba, ove si studiano le divisioni delle figure piane in parti che abbiano l'una all'altra un dato rapporto. Inoltre a lui si debbono altre opere perdute. Fra queste primieramente devesi notare il trattato sui *Porismi* in tre libri, contenente, al dir di Pappo, « un'ingegnosa collezione di proposizioni utili a risolvere i più difficili e più generali problemi ». Gl' illustri geometri Roberto Simson (1687-1768) prima e poi Michele Chasles (1796-1880) tentarono con esito felice di ricostruire quest'opera, tenendo presente le numerose note che trovansi in Pappo. Secondo lo Chasles « i porismi sono « dei teoremi incompleti, che esprimono certe relazioni « fra enti variabili secondo una legge comune; relazioni « indicate nell'enunciato del porisma, ma che bisogna

(1) *Euclidis Opera omnia ediderunt* I. L. Heiberg et H. Menge. *Euclidis Elementa. Edidit et Latine interpretatus est* I. L. Heiberg. Lipsiae, 1883-88, in 5 volumi.

« completare, determinando la grandezza o la posizione « di certe cose che sono le conseguenze dell' ipotesi e « che sarebbero determinate nell' enunciato di un teo- « rema propriamente detto o teorema completo ». Le altre opere perdute sono: una *intorno a Sofismi*, della quale sappiamo solo che aveva lo scopo di addestrare i giovani a distinguere i ragionamenti esatti dai paralogismi; una sulle *sezioni coniche* in 4 libri, che formarono il fondamento dei primi 4 libri dell'opera sullo stesso soggetto di Apollonio; e finalmente una intorno ai *luoghi su una superficie*, della quale nulla si può dire di positivo.

84. Gl'immediati successori di Euclide nella scuola matematica di Alessandria furono probabilmente CONONE DI SAMO e DOSITEO DI COLONO. Durante questo periodo forse erano anche ad Alessandria ZEUSIPPO e NICOTELE DI CIRENE; ma di tutti questi noi sappiamo solo che Conone, Dositeo e Zeusippo corrispondevano con Archimede il quale aveva un' alta opinione della loro abilità.

85. ARCHIMEDE, il più grande matematico dell'antichità, nacque a Siracusa verso il 287 av. C., nel tempo in cui la dominazione romana non comprendeva ancora che l' Italia centrale e meridionale. Secondo Plutarco egli sarebbe stato legato da vincoli di sangue col re Ierone; però Cicerone nel lib. V delle *Quaestiones Tusculanae* l'appella *umilis homo*. Diodoro ci narra che Archimede visitò l' Egitto; e conoscendosi la sua grande amicizia con Conone ed Eratostene, potrebbesi argomentare ch' egli avesse studiato presso la scuola Alessandrina, tanto più che era sommamente edotto di tutto quello che già conoscevasi in matematica. Ritornato a Siracusa, pose il suo genio a difendere la patria sua assediata dai Romani sotto gli ordini di Marcello, inventando macchine di così prodigioso effetto che i soldati nemici prendevano la fuga ogni qualvolta vedevano

erigersi sulle mura della città un qualsiasi oggetto, temendo che non fosse una nuova macchina inventata dal grande geometra.

La storia che Archimede mediante specchi ustorî avesse bruciata una flotta romana sembra non ammissibile. Il genio del grande Siracusano non potè però evitare che per sorpresa i Romani nel 212 av. C. penetrassero nella città e la mettessero a sacco e a fuoco. Nel saccheggio, contro i voleri e gli ordini di Marcello, Archimede perì vittima della brutalità di un soldato. Tito Livio così racconta il truce avvenimento. Essendo Archimede assorto nell' esame di alcune figure tracciate sulla sabbia nella pubblica via, ignaro della presa della città, avvicinatosi a lui un soldato, ed avendogli egli gridato: « non danneggiare i miei cerchi », questi, credendosi insultato, lo uccise. Nessun biasimo per tale fatto può colpire il generale romano, il quale, ammiratore del genio del nemico, volle onorarne la memoria, innalzandogli una tomba, sulla quale fece incidere la figura di una sfera inscritta in un cilindro, secondo, come si racconta, i voleri dello stesso Archimede. Cicerone circa un secolo e mezzo dopo, essendo questore in Sicilia, potè per la figura incisavi scoprire fra rovi e cespugli la tomba dimenticata.

86. Le opere di Archimede a noi pervenute sono le seguenti, disposte secondo l'ordine in cui furono scritte, per quanto si possa argomentare dalle allusioni nelle lettere che accompagnano molti dei libri:

1° sull'*Equilibrio dei piani* o dei loro centri di gravità, libro I in 15 proposizioni; precedute da 8 (o 9) postulati; 2° *La quadratura della parabola* in 24 proposizioni con lettera a Dositeo; 3° *Equilibrio dei piani*, libro II, in 10 proposizioni; 4° *Sulla sfera ed il cilindro*, in due libri, il primo con 50 proposizioni, precedute da 5 postulati, il secondo con 10 proposizioni, mandati entrambi a Dositeo; 5° *la misura del cerchio* in 3 proposi-

zioni; 6° *Sulle spirali*, in 28 proposizioni; 7° *Sui conoidi e sferoidi*, in 40 proposizioni, mandata a Dositeo; 8° l'*arenaria* libro dedicato a Gelone, del quale abbiamo innanzi parlato; 9° *Sui corpi galleggianti*, in due libri, l'uno di 9 e l'altro di 10 proposizioni (1).

Abbiamo inoltre una traduzione latina dall' arabo di 15 *lemmi*, i quali non tutti possono attribuirsi ad Archimede.

Altre opere del sommo Siracusano andarono interamente perdute. Egli, secondo Pappo, scrisse un trattato sui poliedri semiregolari, solidi in numero di 13, le cui facce sono poligoni regolari, non simili, di due o tre specie: di questi si occupò anche Keplero nella sua opera *Harmonices Mundi*. Egli stesso poi nell' *Arenarea* si riferisce ad una sua opera aritmetica dedicata a Zeusippo. Pappo cita un'altra opera *sulle leve* ed altre opere ancora sono ad Archimede attribuite.

87. Crediamo utile di esaminare brevemente le opere esistenti di Archimede, dividendole in tre categorie: geometrica, aritmetica e meccanica.

Nella *Quadratura della parabola* dimostra, facendo uso del metodo di esaustione, prima meccanicamente (prop. VII-XVII), poi geometricamente (prop. XVIII e XXIV) che « qualunque segmento compreso fra una retta e la sezione di un cono rettangolo è i $^4/_3$ di un triangolo che ha la medesima base e la medesima altezza del segmento ». Ed ecco brevemente come Archimede dimostra questo bellissimo teorema.

---

(1) Di quest'opera esiste solo la traduzione latina pubblicata la prima volta da Tartaglia (Venezia, 1543). Questi dice di aver fatta la sua traduzione dal testo greco, ma probabilmente egli non fece che ricopiare da un codice del XIII sec. contenente la versione dal greco o dall'arabo di Guglielmo di Mörbecke. L'opera originale sembra irremissibilmente perduta, tranne un breve frammento pubblicato la prima volta dal Mai. Al Commandino si deve la più accurata traduzione latina (Bologna, 1565).

Inscrivendo nella curva (Fig. 14) il triangolo ABC avente per base quella del segmento, e per vertice il punto B di contatto della tangente parallela alla base, triangolo maggiore della metà del segmento della parabola, e poi altri due triangoli analoghi nei segmenti ADB, BEC, e 4 nei segmenti determinati dai lati AD, DB, BE, EC, e così via, si otterrà una figura poligonale che differirà dal segmento della parabola per meno di una data superficie piccola per quanto si voglia. D'altra parte avendo dimostrato che tr. $ABC = 4$ (tr. $ADB + BEC$), e così di seguito, si conclude che ciascun dei detti triangoli è quadruplo della somma dei triangoli inscritti analogamente nei due segmenti della parabola determinati dai lati. Or poichè la somma dei triangoli inscritti tende verso la superficie della parabola, questa è eguale a

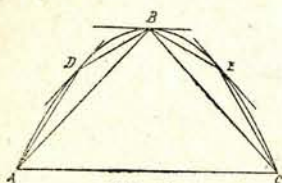



Fig. 14.

$$\Delta + \frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{4^2}\Delta + \ldots + \frac{1}{4^n}\Delta + \ldots = \frac{4}{3}\Delta$$

ove Δ indica l'area del triangolo ABC. Oggidì questa dimostrazione sembra facilissima, poichè è una semplice applicazione di una formula algebrica; ma non era così ai tempi di Archimede.

88. Nel lib. I della *Sfera e del Cilindro* dopo la lettera a Dositeo si trovano alcune definizioni e dei postulati; seguono quindi 7 proposizioni che riguardano il metodo di esaustione — p. es. la VI è: « dati un cerchio e due grandezze disuguali, è possibile costruire due poligoni, l'uno circoscritto e l'altro inscritto al cerchio, e tali che il rapporto del primo al secondo sia minore del rapporto della data grandezza maggiore alla minore ». Le prop. VIII-XVII trattano delle superficie delle piramidi iscritte e circoscritte ad un cono, dei cilindri e dei coni — p. es. la XVI è « La superficie di un cono

isoscele sta alla sua base come il lato del cono al raggio della base », e le prop. XVIII-XXI riguardano i volumi dei coni e dei tronchi di coni. Queste proposizioni poi servono per calcolare le superficie ed i volumi dei solidi generati dalla rotazione di poligoni regolari iscritti e circoscritti in un cerchio massimo della sfera (prop. XXII-XXXIV); nella proposizione XXXV si dimostra che « la superficie di una sfera è 4 volte quella di un suo cerchio massimo » e nella XXXVI che « una sfera è 4 volte il cono la cui base è un cerchio massimo e la cui altezza è un raggio ». Segue poi (XXXVII) la proposizione principale del libro « il volume e la superficie di una sfera sono rispettivamente i $^2/_3$ del volume e della superficie totale del cilindro, la cui base è un cerchio massimo e la cui altezza è il diametro della sfera », ossia del cilindro circoscritto alla sfera. La figura relativa a questo teorema è quella che, secondo i voleri di Archimede, è stata incisa sulla sua tomba. Le prop. XXXVIII-XLVII considerano i segmenti sferici e i solidi generati dalla rotazione di poligoni inscritti o circoscritti ad un cerchio massimo della sfera; e le due proposizioni seguenti dimostrano che la superficie di una calotta sferica, minore o maggiore della semisfera, è equivalente al cerchio il cui raggio è la congiungente il vertice della calotta con un punto della circonferenza della base. L'ultima proposizione dimostra poi che il volume di un settore sferico è equivalente al cono, la cui base è un cerchio equivalente alla superficie della calotta base del settore, e la cui altezza è il raggio della sfera.

Nel II lib. di quest'opera, dopo un'altra lettera diretta a Dositeo, nella quale enumera i principali teoremi del lib. I, si trova p. es., il problema (prop. II): « Trovare una sfera eguale ad un dato cono o ad un dato cilindro ». Nell'analisi di questo problema Archimede perviene alla necessità di costruire due segmenti medi proporzionali fra due dati segmenti, costruzione

che poi Archimede nella sintesi non riferisce quale sarebbe; ed a proposito di ciò Eutocio nel suo Commento a quest'opera introduce un racconto storico della duplicazione del cubo, di cui innanzi abbiamo fatto cenno. Alcuni problemi di questo libro, risoluti sempre prima con l'analisi e poi con la sintesi, poggiano sulla prop. III: « un segmento sferico è equivalente ad un cono, la cui base è quella del segmento e la cui altezza sta a quella del segmento come il raggio della sfera più l' altezza del rimanente segmento sta all' altezza del rimanente segmento ». L'ultima proposizione, la X, è poi: « Dei segmenti sferici di eguali superficie l'emisfero è il massimo ».

89. Il libro *Sulle spirali* incomincia anch' esso con una lettera diretta a Dositeo, nella quale l' A. deplora la morte di Conone, a cui aveva comunicate le sue proposizioni. La definizione della spirale e i principali teoremi del libro possono qui essere riferiti con le stesse parole di Archimede: « Se in un piano si fa rotare con moto uniforme una retta intorno ad un suo punto fisso fino a che ritorni alla primitiva posizione, e se lungo la retta mobile si fa scorrere contemporaneamente dal punto fisso pure con moto uniforme un punto, questo descrive una spirale. L'area racchiusa dalla spirale e dalla retta dopo una completa rotazione è un terzo del cerchio di cui il centro è il punto fisso e il raggio quella parte di retta percorsa dal punto mobile nella rotazione (prop. XXIV). Ancora, se si costruisce la tangente nell'ultima estremità della spirale e dal punto fisso si tracci alla retta mobile (dopo una completa rotazione) la perpendicolare, prolungandola fino ad incontrare la tangente, questa perpendicolare è eguale alla circonferenza del cerchio innanzi detto (prop. XVIII). Inoltre se la retta ed il punto mobili compiono più rotazioni, ritornando la retta nella primitiva posizione, l'area compresa dalla seconda rotazione della spirale è

la metà di quella compresa dalla terza, un terzo di quella compresa dalla quarta, un quarto di quella compresa dalla quinta e così di seguito; ma l'area compresa dalla prima rotazione è un sesto di quella compresa dalla seconda (prop. XXVII). Ancora, se nella spirale di una rotazione si prendano due punti (A e B) e si descrivano le circonferenze col centro comune, il punto fisso (O) e con raggi rispettivi le congiungenti il punto fisso coi due punti presi (OA e OB), prolungando la congiungente minore (OB) fino ad incontrare (in C) la circonferenza di raggio maggiore, gli spazî (M e N) compresi fra' cerchi, la spirale e le congiungenti stanno fra loro in dato rapporto [cioè $M : N :: (OB + \frac{2}{3} BC) : (OB + \frac{1}{3} BC)$] prop. XXVIII). »

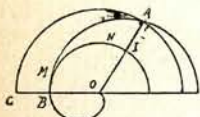



Fig. 15.

Le due proposizioni X e XI di questo libro sono dedicate alla dimostrazione geometrica della somma delle due serie 1, 4, 9,..., n^2; a, $2a$, $3a$,..., na. Nella dimostrazione dei teoremi si fa una continua applicazione del metodo di esaustione.

90. Il trattato sui *Conoidi e Sferoidi* è anche preceduto da una lettera a Dositeo, nella quale l'A. enumera le principali proposizioni del libro. Diciamo solo in riguardo a questo libro, le cui prime proposizioni sono aritmetiche, che Archimede chiama *conoide* il solido generato dalla rotazione di una parabola o di una iperbole intorno al proprio asse, e *sferoide* il solido generato dalla rotazione di una ellisse; questo può essere *lungo* o *piatto,* secondo che l'ellisse gira intorno al suo asse maggiore o intorno al suo asse minore.

91. L'operetta *La misura del Cerchio* contiene le tre proposizioni: 1° Un cerchio è equivalente ad un triangolo rettangolo, i cui cateti sono l'uno eguale al raggio e l' altro alla circonferenza del cerchio; 2° Il rapporto del cerchio al quadrato del diametro è approssimativa-

mente eguale ad 11 : 14; 3° La circonferenza di un cerchio eccede tre volte il suo diametro di una parte minore di $\frac{1}{7}$ e maggiore di $\frac{10}{71}$ del diametro medesimo.

92. Ci rimane ancora di parlare del libro *I*, *Lemmi*, contenente 15 proposizioni, attribuito ad Archimede, ma la cui autenticità è molto dubbia. In esso si trovano i teoremi (IV e XIV) che riguardano le aree di due figure curvilinee chiamate rispettivamente ἄρβηλος e σάλινον. L'ἄρβηλος, che letteralmente significa *coltello del calzolaio,* è racchiusa da tre semicirconferenze i cui centri sono sulla medesima retta, come nella figura 16, e

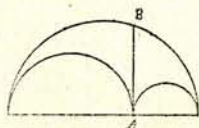
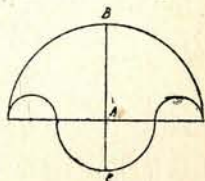



Fig. 16. Fig. 17.

la cui area è eguale a quella del cerchio il cui diametro è la perpendicolare *AB.* La figura σάλινον è racchiusa invece da 4 semicirconferenze i cui centri sono per diritto e due hanno lo stesso centro *A*, come nella figura 17: la sua area è eguale a quella del cerchio di diametro *BC.* Da alcuni si crede che questi due lemmi siano ricavati dall' opera perduta di Archimede *Sui cerchi tangenti.*

93. In tutte queste opere Archimede con meravigliosa genialità studia specialmente la quadratura e la cubatura di superficie curvilinee e di solidi terminati da superficie curve, e fa uso del metodo di esaustione, ottenendo quei risultati che dai geometri moderni si ricavano mediante il calcolo infinitesimale.

94. Del trattato aritmetico, l'*Arenaria*, abbiamo già innanzi parlato; e non ci possiamo fermare qui a rilevare i teoremi aritmetici sparsi nelle opere di Archi-

mede, per non uscire dai limiti prefissici in questo scritto. Chi ha vaghezza di conoscere il contributo del sommo Siracusano alla scienza dei numeri, legga la bella opera dell'Heiberg, *Quaestiones Archimedeae* (1879).

95. Faremo ora breve cenno delle sue opere sulla meccanica, nella quale egli avéa avuto ben pochi predecessori. Delle macchine semplici la leva era certamente nota fin dai tempi remoti, e ad Archita si attribuisce l'invenzione della vite e della carrucola: dall'opera *Mechanica Problemata*, attribuita ad Aristotele, sembra potersi dedurre che la teoria matematica della leva, un secolo prima di Archimede, era studiata: in essa opera trovasi che in un leva la potenza e la resistenza, per farsi equilibrio, debbono stare in ragione inversa dei rispettivi bracci; trovasi altresì qualche nozione del parallelogrammo delle forze e un cenno del principio della velocità virtuale. L'autore del frammento *De levi et ponderoso* (attribuito ad Euclide), se viveva prima di Archimede, doveva avere qualche idea del peso specifico; come pure qualcuno prima di Archimede avea dovuto inventare la locuzione *centro di gravità*, usata da Archimede senza definirla. Però pria di Archimede non aveasi una qualsiasi dimostrazione matematica di una proposizione meccanica, ed egli per lo appunto colmò una tale lacuna con le sue opere meccaniche, nelle quali sono matematicamente trattate molte questioni di statica.

96. Nel I libro dell'*Equilibrio dei piani* sono determinati i centri di gravità del parallelogrammo, del triangolo, del trapezio, e nel libro II, scritto dopo dell'opera *la quadratura della parabola*, tratta dei centri di gravità dei segmenti parabolici e delle figure rettilinee inscritte in detti segmenti: in questo libro trovasi il teorema (prop. VIII): « il centro di gravità di un segmento parabolico divide il diametro in modo che la parte verso il vertice è i $^3/_2$ della parte verso la base ».

97. I due libri *Sui corpi galleggianti* di idrostatica costituiscono un'opera originalissima in tutta l'estensione del termine, poichè nessun matematico greco anteriore avea neppur incidentalmente fissata la sua mente nel campo dell'idrostatica.

Si crede che Archimede sia stato condotto allo studio del peso specifico dei corpi dall'invito avuto dal re Ierone di esaminare se una corona che doveva essere tutta di oro contenesse dell'argento. Si racconta che egli fosse nel bagno quando intravide il metodo di ricerca per rispondere al propostogli quesito, e che immediatamente nudo e bagnato corse a casa gridando: *Eureca, eureca.* Ap- nel I libro di quest' opera trovasi il celebre principio che costituisce la base dell'idrostatica, e che è noto col nome di *principio di Archimede.* Nel II libro sono studiate le posizioni che assumono segmenti di conoidi parabolici immersi in un liquido sotto varie condizioni.

98. Studiando le varie opere del sommo Siracusano si comprende facilmente come presso gli antichi egli era considerato il principe dei matematici; « problema archimedeo » per essi significava problema difficilissimo, la cui soluzione non potea essere data da un ingegno ordinario, e « dimostrazione archimedea » era sinonimo di dimostrazione indiscutibile, chiara, evidente per tutti.

99. Contemporaneo di Archimede era il famoso ERATOSTENE, nato a Cirene nel 276 o 275 a. C., ed educato ad Alessandria sotto il poeta Callimaco, a cui successe nella custodia della biblioteca alessandrina. Si racconta che avendo perduta la vista, nel 194 a. C., si sia ucciso mediante un volontario e continuato digiuno.

Le sue opere su argomenti disparatissimi addimostrano la sua vasta cultura. Scrisse opere *intorno al bene ed al male,* alla *commedia,* alla *geografia*, alla *cronologia*, alla *misura della terra,* alle *costellazioni,* alla *duplicazione del cubo.* Fu il primo a fare un' accurata misura della obliquità dell'ecclittica e un'approssimata misura di un

grado geografico. Inventò un metodo per trovare i numeri primi, metodo che dopo fu chiamato il *crivello* di Eratostene.

Della sua opera geometrica non ci rimane che un solo frammento, la lettera da lui diretta al terzo Tolomeo sulla duplicazione del cubo, riportata nel Commento più volte citato di Eutocio all' opera *la sfera ed il cilindro* di Archimede. In essa lettera è descritto un istrumento, chiamato da Pappo il *mesolabio*, che serve a risolvere il problema e che è, dopo quello attribuito a Platone, il più antico istrumento geometrico conosciuto. Esso consiste in tre tavolette rettangolari (fig. 18), po-

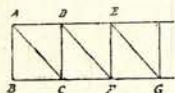
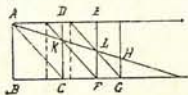



Fig. 18. Fig. 19.

ste in modo che possano la prima scorrere sulla seconda e la terza sotto la seconda. Ecco la costruzione di Eratostene per la ricerca dei due segmenti medi proporzionali fra' due segmenti dati AB, HG. Si dispongano i tre rettangoli, facendo scorrere il primo sul secondo e il terzo sotto il secondo, come nella fig. 19, cioè in modo che i punti ove la congiungente AH incontra le diagonali del secondo e terzo rettangolo stiano sui lati CD ed EF del primo e del secondo rettangolo. Allora KC e LF sono i segmenti cercati, poichè è facile vedere che si ha:

$$AB : KC = KC : LF = LF : HG$$

100. Contemporaneo, ma più giovane di Eratostene e di Archimede, era APOLLONIO DI PERGA in Pamfilia. Questi nacque sotto il regno di Tolomeo III (247 -222 a. C.) e fiorì sotto Tolomeo IV (222-205 a. C.); ancora giovane andò ad Alessandria a studiare sotto i successori di Euclide; dimorò quindi a Pergamo, ove era una scuola rinomata e una biblioteca come quella

di Alessandria. A Pergamo conobbe Eudemo, al quale egli dedicò i primi tre libri della sua grande opera sulle sezioni coniche.

Quest'opera, la quale procurò al suo autore il tititolo di *grande geometra*, era in 8 libri, dei quali possediamo i soli primi 4 nell' originale greco: i 3 successivi erano ignoti in Europa fino alla prima metà del XVII sec., quando fu scoperta una traduzione araba fatta verso il 1250; ma dell' 8º libro nessuna traccia a noi è pervenuta. Nel 1710 l'astronomo Halley di Oxford pubblicò il testo greco dei primi 4 libri ed una traduzione latina dei 3 successivi con una restaurazione ipotetica dell'8º, fondata su alcuni lemmi di Pappo. I primi 4 libri contengono poco più di quanto i geometri antecessori aveano già scoperto. Eutocio ci dice che Eraclide, nella sua vita di Archimede, accusava Apollonio di essersi appropriato delle scoverte non pubblicate del grande Siracusano, ma una tale accusa non ha alcun fondamento, ed Eutocio stesso cita Gemino, il quale in risposta alla sopradetta accusa osserva che nè Archimede nè Apollonio si sono mai vantati di avere inventate le sezioni coniche, e soggiunge che Apollonio ha introdotto nella loro teoria un reale miglioramento, aumentando di molto le conoscenze anteriori. Ed infatti, mentre i primi tre o quattro libri sono fondati sulle opere di Menecmo, di Aristeo, di Euclide e di Archimede, la materia contenuta nei rimanenti libri è quasi per intero nuova.

101. I primi tre libri sono stati mandati ad Eudemo ad intervalli e gli altri, dopo la morte di questo, ad Attalo che regnò in Pergamo dal 241 al 197 a. C. La prefazione del secondo libro è interessante, poichè ci insegna il modo come i Greci divulgavano le loro opere. Vi si legge: « Mando mio figlio Apollonio a portarvi « (ad Eudemo) il secondo libro delle mie coniche. Leg- « getelo accuratamente e comunicatelo ad altri che lo

« possano comprendere. Se Filonide, il geometra, che « vi presentai ad Efeso, viene nelle vicinanze di Pergamo, datelo anche a lui ».

Il primo libro, dice Apollonio stesso nella sua prefazione, « contiene la genesi delle tre sezioni coniche e « dell'iperbole coniugata e le loro principali proprietà più « ampiamente e più generalmente che gli scritti di altri « autori ». Ricordiamo che Menecmo e tutti i geometri posteriori che fino ad Apollonio studiarono le coniche, le consideravano solo come sezioni con piani perpendicolari ai lati in tre diversi coni, cioè nei coni acutangolo, rettangolo, ottusangolo. Apollonio invece, introducendo un' importante generalizzazione, considerava tutte le coniche come sezioni di un solo e medesimo cono, con piani perpendicolari od obbliqui ad un lato. Per conseguenza egli non poteva più conservare gli antichi nomi per le tre curve, ed invece di chiamarle, come prima di lui si faceva, *sezioni del cono acutangolo, del cono rettangolo e del cono ottusangolo* le denominò rispettivamente *ellisse, parabola* ed *iperbole* per la seguente ragione.

I geometri greci dicevano, come innanzi abbiamo riferito, di un rettangolo applicato ad un segmento; παραβάλλεσθαι, se la sua base coincideva col segmento, ὑπερβάλλειν, se era maggiore; ἐλλείπειν, se minore. Ora se C è un punto di una conica di cui AB è un asse, sia D il punto ove la perpendicolare costruita da C ad AB incontra AB, e sia inoltre AE perpendicolare ad AB in A ed eguale al *parametro* della curva. Costruito ora il rettangolo equivalente al quadrato dell' ordinata CD ed avente uno dei suoi lati eguale all' ascissa AD, ed applicato questo rettangolo ad AE, se l' altro suo lato è coincidente (παραβαλλόμενον) con AE, la conica è una *parabola;* se minore (ἐλλεῖπον), una *ellisse;* se maggiore (ὑπερβάλλον), una iperbole. Ciò nel moderno linguaggio analitico, indicando con p il parametro, corrisponde a

dire che la conica è parabola, ellisse od iperbole secondo che y^2 è eguale, minore o maggiore di px. Or basandosi su questa proprietà Apollonio studia le coniche come luoghi piani e non più come sezioni di un cono. Egli però non le definisce mediante una qualche loro proprietà dei *fuochi* o della *direttrice*; scopre alcune proprietà dei fuochi dell'ellisse e dell'iperbole, ma nella sua opera non si trova alcuna nozione del fuoco della parabola e della direttrice delle coniche (1).

102. Fermiamoci ancora un momento per considerare questa opera del matematico di Perga, la quale riposa, si può dire, sopra una sola proprietà delle coniche dedotta dalla natura del cono sezionato. Chiamando *asse* del cono circolare la congiungente il vertice col centro del cerchio di base, e *triangolo per l'asse* il triangolo sezione della superficie conica con il piano che contiene l'asse e che è perpendicolare al piano della base, Apollonio per ottenere le sue sezioni coniche suppone il piano secante perpendicolare al piano del triangolo per l'asse; i punti A, B ove questo piano incontra i lati del triangolo sono i *vertici* e la loro congiungente un *diametro*, detto *latus transversum*, della curva sezione. Costruito poi da uno dei vertici, p. es. A della curva, un segmento di una certa lunghezza AE perpendicolare al piano del triangolo per l'asse, si unisca l'estremo E con B. Tracciando da un punto qualunque C della curva l'*ordinata*

---

(1) Il nome di *fuochi* è stato la prima volta suggerito da Keplero: Apollonio li chiama *punti che nascono dall'applicazione*, e nel libro III prop. 45-52 enuncia alcune proprietà dei fuochi delle coniche a centro. Nella prop. 45 li definisce come quei punti che dividono ciascuno l'asse maggiore in due segmenti il cui rettangolo equivale, come dice Apollonio, al quarto della *figura*, cioè al rettangolo del semiasse maggiore e del semiparametro; nella prop. 46 trova che le congiungenti un qualsiasi punto della conica coi due fuochi formano con la tangente alla curva in quel punto angoli eguali e nella prop. 52 che in un' ellisse la somma di queste due congiungenti è eguale all'asse maggiore.

CD perpendicolare ad AB, indicando con F il punto d'incontro di CD con EB, il quadrato di CD sarà equivalente al rettangolo dei segmenti DF e AD. Da questa proprietà caratteristica Apollonio deduce con grandissima abilità quasi tutte le altre proprietà delle coniche. Il diametro AB e la perpendicolare AE sono due elementi sufficienti per costruire la curva; e di essi si sono serviti gli antichi per la loro teoria sulle coniche. La perpendicolare AE fu da essi denominata *latus erectum;* i moderni l'han chiamata prima *latus rectum* e poi *parametro.*

Nell'opera di Apollonio si trovano le più belle proprietà delle sezioni coniche: quelle degli asintoti (nel libro 2°); il rapporto costante dei rettangoli dei segmenti determinati da una conica sopra due trasversali parallele a due assi fissi condotte da un qualsiasi punto (prop. 16-23 del libro 3°); le principali proprietà dei fuochi dell'ellisse e dell'iperbole (prop. 45-52 del libro 3°). Nel medesimo libro 3° trovasi l'importante proposizione (37), che è la base della teoria delle polari reciproche: « Se per il punto comune di due tangenti ad una sezione conica si tracci una trasversale che incontri la conica in due punti e la corda che congiunge i punti di contatto delle tangenti in un terzo punto, questo punto ed il punto di concorso delle due tangenti saranno coniugati armonici rispetto ai due primi punti ».

Le prime 23 proposizioni del lib. IV sono relative alla divisione armonica delle rette del piano di una conica, e sono la più parte diversi casi del teorema sopra enunciato. Nelle proposizioni seguenti l'A. considera il sistema di due coniche e dimostra che esse non possono secarsi in più di 4 punti. Esamina ciò che avviene se esse si toccano in uno o in due punti e tratta di diversi altri casi di rispettive posizioni che si possono presentare. Però il monumento più prezioso del genio di Apollonio è il libro V. In questo si può dire che per la prima volta appar-

vero le questioni di *massimi* e di *minimi* (1), ed in esso non solo trovasi tutto ciò che i metodi analitici di oggigiorno ci insegnano su questo soggetto, ma vi si può riconoscere il germe della bella teoria delle *evolute*. Infatti Apollonio dimostra che da ciascuna parte dell'asse di una conica vi è una successione di punti da cui non si può costruire che una sola normale alla parte opposta della curva; dà la costruzione di questi punti ed osserva che la loro continuità separa due spazi che presentano la notevole differenza che da ciascun punto dell'uno si possono costruire due normali alla curva, e nessuna da ciascun punto dell'altro. Ecco dunque i *centri di osculazione* e l'*evoluta* di una conica perfettamente determinati. Apollonio fa uso di un'iperbole ausiliaria, di cui determina gli elementi, per costruire i piedi delle normali alla conica tracciate da un punto dato. Tutte queste ricerche sono condotte con una ammirabile sagacità. Il lib. VI tratta principalmente di coniche simili e il VII di diametri coniugati.

103. Pappo attribuisce poi ad Apollonio le seguenti altre opere: *Sui contatti; sui luoghi piani; sulle inclinazioni; sulla sezione di un' area; sulla sezione determinata,* e dà pochi lemmi mediante i quali fu tentata la ricostruzione delle opere originali perdute. Vieta restaurò la prima nella sua opera *Apollonius Gallus;* Fermat nel 1637 e Simson nel 1746 tentarono la restaurazione della seconda; Ghetaldi della terza; Halley della quarta; Snellius, Ghetaldi e Simson ancora della quinta. Nella prima di queste opere, secondo la restaurazione di Vieta, trovasi il celebre problema noto sotto il nome di *Problema di Apollonio,* cioè descrivere un cerchio tangente a tre cerchi dati. Dall'arabo inoltre è stata tra-

---

(1) Devesi però osservare che la prop. 27 del VI lib. di Euclide considera per lo appunto un *massimo*.

dotta un' altra opera intitolata *De Sectione rationis*, e pubblicata da Halley nel 1706.

Finalmente Eutocio nel suo commento all'opera *sulla Sfera e il Cilindro* di Archimede attribuisce ad Apollonio la seguente costruzione per la ricerca di due segmenti medi proporzionali fra due dati segmenti. Sui lati di un angolo retto si prendano a partire dal vertice i segmenti AB, AC eguali ai due dati segmenti (Fig. 20) ed indi, costruito il rettangolo $ABDC$, si descriva con centro E, punto medio della diagonale BC, la circonferenza con raggio tale che il punto D e i punti F e G, ove detta circonferenza interseca i prolungamenti dei lati AB e AC, siano per diritto. Saranno allora BF e CG i segmenti richiesti. Si ha, infatti: (Euclide, lib. II, proposizione 6) essendo EH perpendicolare ad AC, $AG.GC + HC^2 = HG^2$, da cui, aggiungendo EH^2, $AG.\,GC + EC^2 = EG^2$. Analogamente si dimostra che $AF.\,FB + EB^2 = EF^2 = EG^2$; ma $EC^2 = EB^2$, quindi $AG.\,GC = AF.\,FB$, epperò $AG : AF = FB : GC$. Inoltre pei triangoli simili AGF, CGD, BDF si ha $AG : AF = CG : CD = BD : BF$, quindi $BD : BF = BF : GC = GC : CD$, ossia $AC : BF = BF : CG = CG : AB$.

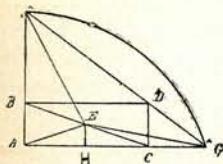
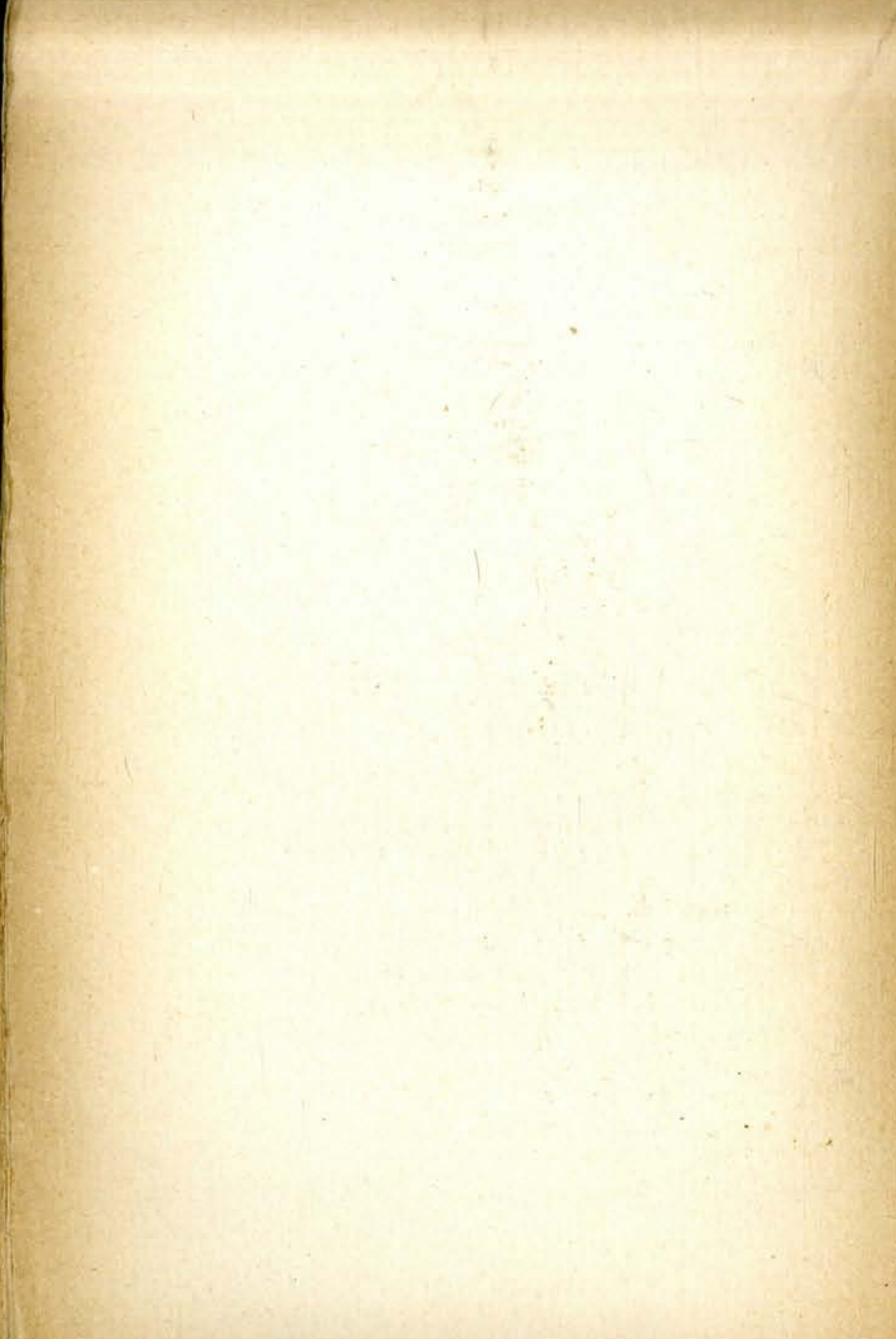



Fig. 20.

104. Il secolo che produsse Euclide, Archimede ed Apollonio fu quello nel quale il genio matematico greco attinse il suo più alto sviluppo. Per altri secoli ancora la geometria rimase uno studio favorito, ma nessuna opera apparve che potesse paragonarsi alle opere di questi sommi.

CAPITOLO VII.

I MATEMATICI GRECI DEL II SEC. A. C.

105. Uno dei primi successori di Apollonio è NICOMEDE, che visse probabilmente fra il 250 ed il 150 a. C. e che deve la sua celebrità all' invenzione della curva detta *concoide*. Questa curva può servire per la trisezione dell' angolo e per la duplicazione del cubo: Newton l' usò anche per la costruzione geometrica di alcune equazioni di 3° e di 4° grado. Essa è tale che la congiungente un suo punto qualunque A con un punto fisso B è tagliata da una retta data EF in modo che il segmento AC compreso fra la curva e la retta sia costante ed eguale ad un dato segmento. Nicomede inventò un piccolo strumento, come nella figura 21 per descrivere la curva. Il punto fisso B dicesi *polo*, la retta EF *base* ed il segmento AC *intervallo*.

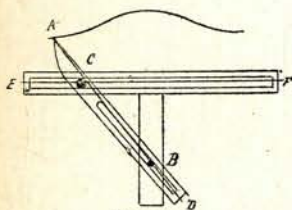



Fig. 21.

106. La costruzione per la duplicazione del cubo o per la ricerca di due segmenti medi proporzionali fra due dati segmenti mediante la concoide è la seguente.

Sui lati di un angolo retto a partire dal vertice prendansi AB e AC eguali ai due segmenti dati (Fig. 22), e si completi il rettangolo $ABDC$; indi sul prolungamento di CA prendasi $AE = AC$ e sia F il punto ove la congiungente DE interseca AB. Dal punto medio G di AC costruiscasi la perpendicolare; su di essa prendasi il punto H in modo che sia $CH = AF$ e da C si

tracci CK parallela alla congiungente EH. Con polo H, con base CK e con intervallo eguale al segmento AF descrivasi la concoide che incontra in L il prolungamento di AC. Si unisca L con D e sia M il punto in cui il prolungamento di LD incontra il prolungamento di AB. I due segmenti medi proporzionali richiesti sono

Fig. 22. Fig. 23.

CL e BM. Infatti si ha $MB : DC = BD : CL$, ossia $MB : AB = AC : CL$, od ancora, essendo $AB = 2BF$ e $AC = \frac{1}{2} CE$, $MB : 2BF = \frac{1}{2} CE : CL$, da cui $MB : BF = CE : CL$; ma $EC : CL = HK : KL$, quindi $MB : BF = HK : KL$, e componendo $MF : BF = HL : KL$; ma $BF = KL$, quindi $MF = HL$ e perciò ancora $BM = HK$. Si ha poi (Euclide, lib. II, prop. 6) $AL.CL + GC^2 = GL^2$, ed aggiungendovi HG^2, $AL.CL + HC^2 = HL^2$, ossia $AL.CL + BF^2 = MF^2$; ma si ha pure $MF^2 = AM.BM + BF^2$, quindi $AL.CL = AM.BM$, epperò $CL : BM = AM : AL$; ma $AM : AL = DC : CL = BM : BD$, quindi $DC : CL = CL : BM = BM : BD$, ossia $AB : CL = CL : BM = BM : AC$.

107. Proclo dice che Nicomede adoperò la concoide anche per la trisezione dell' angolo, mentre Pappo attribuisce a sè una tale applicazione. Si perviene a questo scopo, con un metodo che richiama alla mente l'ottavo dei lemmi attribuiti ad Archimede, nel seguente modo :

Sia l'angolo acuto ABC (Fig. 23) da trisecare. Da un punto A di uno dei lati si tracci la perpendicolare AC all'altro lato e si completi il rettangolo $ACBD$. Con polo B, con base AC e con intervallo $2AB$ si descriva la concoide che incontra il prolungamento di DA in F; l'angolo FBC è il terzo dell'angolo ABC. Infatti se H è il punto medio di EF, i triangoli ABH, AHF sono isosceli, epperò l'angolo $ABH = AHB = 2AFH = 2FBC$.

108. Verso il 180 a. C. visse DIOCLE, l'inventore della *cissoide* (1), mediante la quale si risolve altresì il problema di Delo. Diamo qui la definizione di questa nuova curva e la soluzione di Diocle, secondo Eutocio, del problema di Delo. Siano AB e CD due diametri ortogonali di un cerchio (Fig. 24): su CD dall'una e dall'altra parte del centro O si costruiscano segmenti eguali; siano due di essi $OE = OF$: da E ed F si traccino EG, FH perpendicolari a CD: se K è il punto d'intersezione della congiungente HD con EG, K è un punto della curva. Analogamente si determinano gli altri punti.

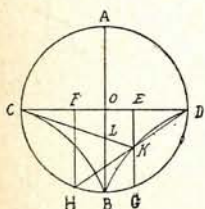



Fig. 24.

Si ha $CE : EG = EG : ED$ e $CE : EG = FD : FH = ED : EK$, quindi $CE : EG = EG : ED = ED : EK$, da cui si vede che EG ed ED sono medi proporzionali fra CE e EK.

109. Nel medesimo secolo, forse verso il 150 a. C., visse il geometra PERSEO, al quale Proclo ed Erone attribuiscono lo studio della superficie generata dalla completa rotazione di un cerchio intorno ad una retta

---

(1) Il nome di *cissoide* a questa curva è stato dato da Gemino, poichè la figura formata dalla semicirconferenza CAD e dai due rami BC, BD di essa rassomiglia alla foglia dell'edera (χίσσος, *edera)*. Pare che Diocle non riuscisse a descrivere meccanicamente questa curva; era riservato a Newton di darne la genesi e la costruzione nella sua *Arithmetica universalis* ed a Wallis di trovarne la quadratura.

del piano di questo cerchio, ovvero, come gli antichi si esprimevano, dalla rivoluzione completa di un cerchio avente il centro sulla circonferenza di un secondo cerchio e il piano perpendicolare al piano di questo, superficie detta dagli antichi *spira* o *anello* e dai moderni *toro*. Sezionando questa superficie, che varia al variare del rapporto fra' due cerchi, con piani paralleli all'asse di rotazione, si ottengono le così dette *linee spiriche*, studiate da Perseo; ma la sua opera non è a noi pervenuta.

110. Ignorasi l'epoca in cui visse ZENODORO, ma è probabile che egli debbasi annoverare fra' matematici del secondo secolo avanti C. Egli è autore di un' opera *sulle figure di eguale perimetro*, che contiene 14 proposizioni delle quali citiamo le seguenti:

1° Di due poligoni regolari isoperimetri è maggiore quello che ha maggior numero di lati (prop. I); 2° l'area del cerchio è maggiore di quella di qualunque poligono isoperimetro (prop. II); 3° la somma delle aree di due triangoli isosceli simili, costruiti su basi disuguali, è maggiore della somma delle aree di altri due triangoli isosceli costruiti sulla stessa base e dissimili fra loro, ma isoperimetri coi primi (prop. VI); 4° dei poligoni isoperimetri è maggiore il regolare (prop. VII); 5° dei segmenti circolari aventi archi eguali è maggiore il semicerchio (prop. XIV).

111. Fra' geometri che vissero nel secondo secolo a. C., e che perciò appartengono al periodo che studiamo, devesi annoverare IPSICLE al quale furono attribuiti i lib. XIV e XV degli *Elementi* di Euclide. La critica recente però ha dimostrato che il XV non può essere attribuito ad Ipsicle, ma a diversi autori che lo compilarono in diverse epoche.

Il XIV libro degli *Elementi* o meglio il libro d'Ipsicle, studia i poliedri regolari e contiene le seguenti 7 proposizioni: 1°. L'apotema di un pentagono regolare

è la metà della somma del raggio del cerchio circoscritto e del lato del decagono regolare inscritto nello stesso cerchio; 2°. Il medesimo cerchio è circoscritto al pentagono regolare di un dodecaedro ed al triangolo equilatero di un icosaedro inscritti nella medesima sfera; 3°. Trenta volte il rettangolo dell'apotema e del lato di un pentagono regolare è equivalente alla superficie del corrispondente dodecaedro; 4°. La superficie del dodecaedro sta a quella dell'icosaedro come il lato del cubo al lato dell' icosaedro; 5°. Il lato del cubo sta al lato dell'icosaedro come $(x+y)^2+x^2:(a+y)^2+y^2$, ove x è la parte maggiore, ed y la minore di un segmento diviso in media ad estrema ragione; 6°. Il volume del dodecaedro è a quello dell'icosaedro come il lato del cubo a quello dell' icosaedro; 7°. Il rapporto di due segmenti è eguale a quello delle loro sezioni auree.

112. Uno dei più grandi genî dell'antichità è stato IPPARCO, il padre dell' astronomia matematica greca, dalle cui opere è certamente derivato l' *Almagesto* di Tolomeo. Egli nacque a Nicea di Bitinia nell'Asia Minore; fece osservazioni astronomiche a Rodi e forse anche ad Alessandria fra il 161 e 127 a. C. I suoi scritti però sono interamente perduti: Teone nel suo Commento sull'*Almagesto* ci fa conoscere che Ipparco scrisse un'opera in 12 libri, nella quale erano calcolate le corde degli archi di una circonferenza. I suoi calcoli astronomici richiedevano la conoscenza della trigonometria piana e sferica, della quale nelle opere degli scrittori antecedenti non vi è traccia, e perciò a lui se ne attribuisce l'invenzione.

113. Il medesimo secolo vide ERONE DI ALESSANDRIA, che fu discepolo del celebre meccanico Ctesibio; e poichè questi visse sotto Tolomeo Evergete II (170 -117 a. C.), così Erone fiorì intorno al 120-100 a. C.

Non solo egli è famoso per le sue varie invenzioni

meccaniche, ma a lui si devono notevoli miglioramenti apportati nella geometria pratica.

Un prezioso lavoro della Geometria greca, il quale colma una lacuna esistente nella collezione degli scritti scientifici dell'antichità, dandoci notizia sull'antica Geodesia, è un'opera di Erone che per la prima volta fu pubblicata tradotta in italiano dal Venturi col titolo *Il traguardo.* In quest' opera viene determinata l' area di un triangolo in funzione dei lati nel seguente elegantissimo modo:

Inscritto nel dato triangolo ABC (Fig. 25) il cerchio DEF di centro I, si vede che i rettangoli $BC.ID$, $CA.IE$, $AB.IF$ sono rispettivamente il doppio dei triangoli BIC, CIA, AIB; epperò il rettangolo del raggio ID del cerchio inscritto e del perimetro del triangolo ABC è il doppio del medesimo triangolo. Preso sul prolungamento di BC il segmento $CG = AE$, BG è eguale al semiperimetro del triangolo ABC, e per conseguenza il rettangolo $BG.ID$ è equivalente al triangolo ABC. Se si traccino ora IH e C rispettivamente perpendicolari a BI e BC, il quadrangolo $BICH$ è inscrittibile, e perciò gli angoli BIC, BHC sono supplementari; ma essendo IA, IB, IC le bisettrici degli angoli FIE, FID, DIE, anche gli angoli BIC, AIE sono supplementari, quindi gli angoli BHC, AIE saranno eguali ed i triangoli BCH, AEI simili. Si ha perciò $BC : CH = AE : IE = CG : ID$ e *permutando* (ἐναλλάξ) $BC : CG = CH : ID = CK : DK$, e *componendo* (συνθέντι) $BG : CG = CD : DK$, da cui $BG^2 : BG.CG = CD.BD : DK.BD \; (= ID^2)$ e $BG^2.ID^2 = BG.CG.CD.BD$. Ma $BG^2.ID^2$ è eguale al quadrato dell' area del triangolo, e se p, a, b, c indicano rispettivamente il semiperimetro

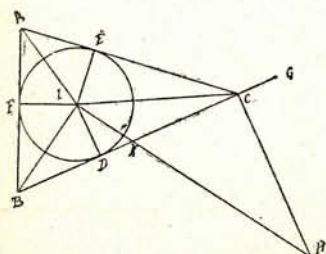
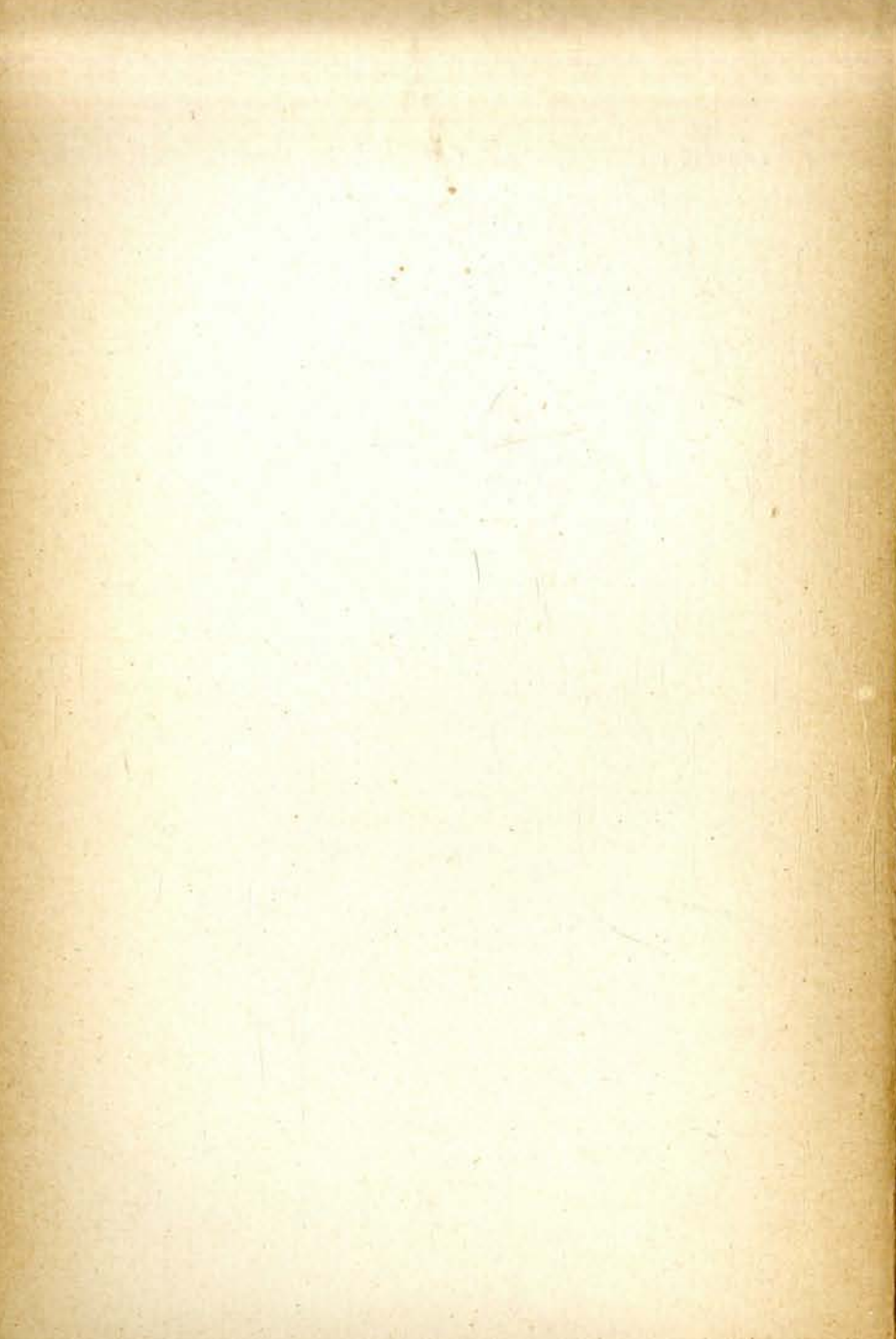



Fig. 25.

e i lati del triangolo, $BG = p$, $CG = p - a$, $BD = p - b$, $CD = p - c$, quindi la nota formola dell' area del triangolo ABC, $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Recentemente R. Schöne ha scoperto nella biblioteca del Serraglio a Costantinopoli il manoscritto della *Metrica* di Erone, nella quale non si trovano le regole imperfette degli Egiziani imitatori di Ahmes per la misura di alcune aree poligonali, regole che si leggono nei manoscritti della stessa opera, ch'erano prima conosciuti, e le quali vi debbono essere state inserite da qualche ignorante copista.

CAPITOLO VIII.

PERIODO DI DECADENZA.

114. I matematici greci, di cui dobbiamo ancora parlare, non hanno portato un gran contributo al progresso della geometria; incomincia il periodo della decadenza, ed il popolo greco, questo popolo prediletto della natura, che avea innalzato il Partenone ed il monumento a Giove Olimpico, dal cui seno erano usciti Omero e Pindaro, Sofocle e Demostene, questo popolo che con Platone e Aristotele avea dato i due più grandi filosofi dell'antichità, che in geometria avea creato dei capolavori, innanzi ai quali tuttora è forza inchinarsi, incomincia a scendere lentamente per quindi scomparire dalla vita intellettuale dell'umanità.

Quale la causa di questo fenomeno?

Al momento in cui la scuola di Alessandria incominciava a languire, Cesare Augusto detronizzava i successori di Tolomeo, e l'Egitto, non più nazione indipendente, diventava una semplice provincia dell'impero Romano, e la caduta dei Lagidi, di quella dinastia cioè che tanto avea contribuito ai progressi della scienza, dovea segnare per la matematica un'era novella, punto simile all'antica.

Tuttavia il genio matematico greco, così fecondo e possente nell'età antecedente, manderà ancora qualche sprazzo di luce: l'astronomia si eleverà ancora con Tolomeo; Diofanto creerà l'Algebra. Però l'età d'oro della scienza greca è ben finita ed ai capolavori dei tre sommi geometri, Euclide, Archimede ed Apollonio, non si po-

tranno contrapporre che gli utili ma pallidi commenti dell'opera di Pappo.

Brevemente diremo dei matematici di quest'epoca.

115. Verso l' anno 70 a. C. visse GEMINO di Rodi, il quale, oltre un lavoro astronomico a noi pervenuto, scrisse un' opera sull'*ordinamento della matematica,* della quale non ci rimangono che quanto da essa hanno attinto Proclo ed Eutocio. Essa doveva contenere non poche notizie storiche sui primi matematici greci e, se non fosse andata dispersa, avrebbe potuto darci la soluzione di non poche questioni, alle quali non sappiamo oggi rispondere.

116. Forse nel primo sec. a. C. visse anche TEODOSIO di Tripoli, a cui dobbiamo un'opera in tre libri sulla geometria della sfera: essa però non ha nulla da vedere con la trigonometria sferica, non facendovisi alcuna menzione di *triangoli sferici.*

117. E nel medesimo secolo visse ancora un altro matematico, menzionato da Strabone, DIONISODORO, nativo di Amiso nel Ponto; ma di lui possiamo dire solo che tentò di risolvere il problema lasciato incompleto da Archimede nella sua *Sfera e Cilindro*, di dividere, cioè, una sfera in modo che i due segmenti siano in un dato rapporto.

118. Non possiamo precisare l'età in cui visse SERENO di Antissa (Lesbia), autore di due trattati, uno sulla *Sezione del cilindro* in 35 proposizioni, l'altro sulla *Sezione del cono* in 63, inseriti come appendice all'edizione di Apollonio pubblicata per cura dell'Halley. Il secondo trattato studia le sezioni triangolari del cono. Per es. « Se in un cono retto l' asse non è minore del raggio della base, fra' triangoli sezioni di esso con piani passanti pel vertice è massimo quello prodotto dal piano che contiene l' asse » (prop. 5 e 6); « in un cono scaleno il massimo triangolo sezione di un piano passante pel vertice è l'isoscele e il minimo è prodotto dal piano

perpendicolare alla base del cono medesimo » (prop. 22). Nel trattato sul Cilindro si studiano le diverse sezioni, specialmente la sezione ellittica. In esso importantissima è la prop. 33, poichè è il fondamento della moderna teoria del rapporto armonico. È la seguente: Dal punto D (Fig. 26) esterno al triangolo ABC si tracci una retta che tagli i lati AC, AB in E e F e si determini su di essa il punto G tale che $DE : DF = EG : GF$; la congiungente AG taglierà una qualunque trasversale del triangolo passante per D, p. es. DKH, in un punto L tale che $DK : DH = KL : LH$.

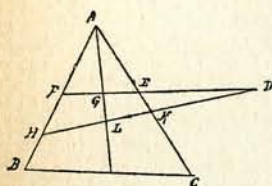



Fig. 26.

119. Verso la fine del primo secolo d. C. o nei primi anni del secolo successivo devesi collocare Menelao, poichè di lui Tolomeo ricorda due osservazioni astronomiche fatte nel primo anno di Traiano, cioè nel 98 a. C. Egli è autore di un opera perduta sul calcolo delle corde e di una *Sphaerica* in tre libri a noi pervenuta nella sua traduzione araba. Questa è un trattato sui triangoli sferici; e vi sono descritte le proprietà analoghe a quelle che godono i triangoli piani, come nel lib. I di Euclide.

P. es. In ogni triangolo sferico un lato è minore della somma degli altri due (I, 5); la somma dei tre angoli è maggiore di due retti (I, 11); in un triangolo a lati eguali si oppongono angoli eguali ed al lato maggiore l'angolo maggiore (I, 8, 9); gli archi che bisecano gli angoli, passano per un medesimo punto (III, 9); l'arco che biseca un angolo, determina sul lato opposto due segmenti tali che le corde dei doppî dei segmenti stanno fra loro come le corde dei doppi degli altri due lati (III, 6). Nel 3° libro di quest'opera trovasi, quale lemma, la proposizione nota sotto il nome di *teorema di Menelao*, cioè che in un triangolo piano una qualunque

trasversale taglia i tre latì in modo che il prodotto dei tre segmenti che non hanno alcun estremo in comune è eguale al prodotto degli altri tre segmenti (1). Evvi poi la proposizione analoga sul triangolo sferico (prop. 1), nella quale al posto dei *segmenti* devesi sostituire *le corde del doppio dei tre segmenti.* Questo teorema è stato grandemente ammirato dagli Arabi, che lo chiamarono *la regola di intersezione;* i primi scrittori del medio evo lo indicarono col suo nome arabo *catha* e più tardi fu noto col nome di *regula sex quantitatum.*

120. Pappo ci riferisce che Menelao ed altri due ignoti geometri, DEMETRIO di Alessandria e FILONE di Tiana studiarono delle curve sulle superficie; ma nulla conosciamo intorno a questi studi.

121. Del celebre astronomo CLAUDIO TOLOMEO, nato in Egitto, sappiamo solo che fece osservazioni astronomiche dal 125 al 151 d. C. L' opera sua principale ha per titolo Μαθηματική Σύνταξις ovvero Μεγαλὴ Σὺνταξις. La voce μεγαλὴ fu ben presto alterata dagli ammiratori in μεγίστη, parola che nella traduzione araba è diventata, preceduta dall'articolo, *Almidschisti*, da cui è derivato il nome di *Almagesto* col quale ora è nota. Su quest'opera si fondò fino ai tempi di Copernico tutta la scienza astronomica, che costituiva il sistema noto col nome di « sistema tolemaico ». Tolomeo in quest'opera,

---

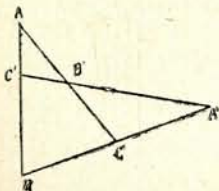
(1) Menelao non usa la parola *prodotto,* ma dice che (Fig. 27) AB_1 ha con B_1C il rapporto composto di $AC_1 : C_1B$ e $BA_1 : A_1C$ ossia che

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C}.$$

Fig. 27.

per i calcoli astronomici, creò quella branca della matematica che prende ora il nome di *Trigonometria*.

122. L'*Almagesto* è in 13 libri. Nel cap. 9° del I libro si mostra come si calcolano le corde. A tale scopo la circonferenza è divisa in 360 gradi, ciascuno dei quali è poi bisecato. Il diametro è invece diviso in 120 parti eguali, ciascuna delle quali è divisa in 60 parti, e ciascuna di queste suddivisa ancora in 60 parti.

Queste parti in latino furono chiamate *partes minutae primae e partes minutae secundae*, dalle quali parole derivarono i nostri nomi di « minuto e « secondo ». Questo metodo di divisione sessagesimale è di origine babilonese, ed era noto a Gemino ed anche ad Ipparco. Però il metodo di calcolare le corde è originale ed appartiene a Tolomeo, a cui si deve il teorema « il rettangolo delle diagonali di un quadrangolo inscritto in un cerchio è equivalente alla somma dei rettangoli dei lati opposti ». Provato questo teorema, egli con molta eleganza mostra come si possa calcolare, mediante le corde di due archi minori di mezza circonferenza, la corda dello arco somma e dell'arco differenza, e mediante la corda di un arco la corda della metà del medesimo arco nel seguente modo:

1°. Date le corde AB, AC, calcolare la corda BC dell'arco differenza. Condotto il diametro AD (Fig. 28), diviso in 120

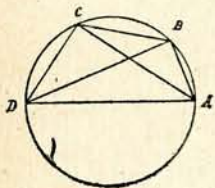



Fig. 28.

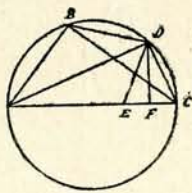



Fig. 29.

parti eguali, si ha pel teorema di Pitagora, $CD=\sqrt{120^2-AC^2}$, $BD=\sqrt{120^2-AB^2}$, e pel quadrangolo iscritto $ABCD$,

$AC.BD = AD.CB + AB.CD$, ossia

$$AC.\sqrt{120^2-AB^2} = 120.\ CB + AB.\sqrt{120^2-AC^2}$$

da cui si ricava CB.

2°. Data la corda BC di un arco, trovare la corda CD dell'arco metà. Sul diametro AC (Fig. 29) facciasi $AE = AB$ e sia DF perpendicolare ad AC. I due triangoli BAD, EAD sono eguali, epperò $DE = BD = DC$ ed il triangolo DEC è isoscele e $FC = FE = \frac{1}{2}\ CE = \frac{1}{2}(AC-AE)$ $= {}^1/_2\,(AC-AB) = 60 - {}^1/_2\sqrt{120^2 - BC^2}$. Inoltre per la similitudine dei due triangoli rettangoli CFD, CDA, è $CF : CD = CD : AC$, da cui

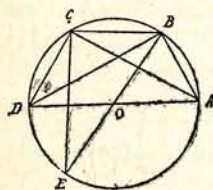
$$CD^2 = AC.CF = 120.(60 - {}^1/_2\sqrt{120^2-BC^2}),$$

e da questa eguaglianza si ricava il valore di CD.

3°. Date le corde AB e BC, trovare la corda AC dell'arco somma, supposto che non solo gli archi AB, BC siano minori di mezza circonferenza, ma che tale sia anche l'arco somma AC. Condotti i diametri AD, BE (Fig. 30) le corde AB, DE risultano eguali, e pel quadrangolo $BCDE$ si ha $BD.CE = BC.DE + BE.CD$, ossia

$$\sqrt{120^2-AB^2}.\sqrt{120^2-BC^2} = BC.BA + 120\sqrt{120^2-AC^2},$$

da cui si determina AC.

Fig. 30.

Partendo quindi dai valori dei lati del quadrato, del pentagono, dell'esagono e del decagono regolari inscritti, che dànno rispettivamente le corde degli archi di 90°, 72°, 60° e 36° in parti del diametro, Tolomeo calcola mediante i suddetti teoremi le corde di tutti gli archi da 0° a 180° di ${}^1/_2$ in ${}^1/_2$ grado.

In questo medesimo primo libro i cap. 11 e 12 sono dedicati alla trigonometria rettilinea e sferica. Egli dimostra il teorema di Menelao ed anche la « *regula sex*

quantitatum » e su questi teoremi anzi fonda la sua trigonometria. Il principale teorema della trigonometria rettilinea che i lati di un triangolo sono proporzionali alle corde del doppio degli archi che misurano gli angoli opposti, non vi si trova esplicitamente enunciato, ma è contenuto in altri teoremi.

123. Tolomeo scrisse altre opere che hanno poco e nessuna attinenza colla matematica, tranne una sulla Geometria. Di questa conosciamo alcuni estratti che trovansi in Proclo, dai quali si apprende che Tolomeo non riguardava il postulato euclideo sulle parallele come una proposizione evidente, e ch'egli è stato il primo di una lunga serie di geometri dei tempi antichi e dei moderni, che si studiarono vanamente di dimostrarlo.

124. Verso il 100 d. C. fiorì NICOMACO DI GERASA, di cui abbiamo un' opera sull' aritmetica in due libri, famosa nei suoi tempi. Per la riduzione fattane dal Boezio, l' Aritmetica di Nicomaco ha esercitato molta influenza nel Medio-evo.

Essa è la prima opera nella quale l' Aritmetica è stata trattata indipendentemente dalla Geometria. Contiene però pochi risultati realmente originali; vi si trova la proposizione degna di nota che i numeri cubi sono sempre eguali alla somma di numeri dispari successivi; così $8 = 2^3 = 3 + 5$, $27 = 3^3 = 7 + 9 + 11$; $64 = 4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$, ecc. Se in essa si conserva l'antica nomenclatura geometrica, il metodo è induttivo invece che deduttivo.

125. Nel medesimo tempo visse TEONE DI SMIRNE, il quale scrisse un'opera dal titolo *Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*, analoga a quella di Nicomaco. Vi si trova l'importante teorema che ogni numero quadrato, o questo numero meno 1, è divisibile per 3 o per 4 o per entrambi questi numeri: se il quadrato è divisibile solo per 3, diminuito di 1,

sarà divisibile per 4; se è divisibile solo per 4, diminuito di 1, sarà divisibile per 3; se poi non è divisibile nè per 3, nè per 4, diminuito di 1, sarà divisibile e per 3 e per 4. Vi si trova una nuova classe di numeri, da Teone detti *diametri*, i cui quadrati sono della forma $2n^2 \pm 1$. Essi si ottengono nel seguente modo: essendo 1 e 1 il lato e il diametro del primo quadrato, $1 + 1$ è il lato e $2.1 + 1 = 3$ il diametro del secondo; $2 + 3 = 5$ è il lato e $2.2 + 3 = 7$ il diametro del terzo; $5 + 7 = 12$ il lato e $2.5 + 7 = 17$ il diametro del quarto e così via; ed in generale se indichiamo con l_n e d_n l'n.mo lato e l'n.mo diametro, è

$$l_n = l_{n-1} + d_{n-1}\,,\ d_n = 2l_{n-1} + d_{n-1}.$$

È curioso che i rapporti fra' diametri ed i lati corrispondenti sono le successive ridotte della frazione continua

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}$$

che rappresenta il valore approssimato di $\sqrt{2}$. Teone però nulla dice nè della radice quadrata di 2, nè delle frazioni continue (1).

126. Da quest'epoca incomincia lo studio favorito della teoria dei numeri che raggiunge il massimo splendore con Diofanto; ma dopo Tolomeo per circa 150 anni nessun geometra di qualche importanza si può citare. Verso il 200 d. C. visse SESTO GIULIO AFRICANO, il quale scrisse un'opera intitolata *Miscellanea*, nella quale si occupò di geometria applicata all'arte della guerra e specialmente dei problemi di determinare la larghezza

---

(1) Questi diametri sono i *diametri razionali*, ai quali sembra che Platone alluda nel famoso passo intorno al numero *nuziale (Repubblica*, VIII, 246). Si osservi che coi numeri diametri si hanno tutte le soluzioni razionali delle due equazioni indeterminate di 2° grado $2x^2 + 1 = y^2$, $2x^2 - 1 = y$.

di un fiume, la cui sponda opposta è occupata dal nemico e di misurare l'altezza delle mura di una città assediata.

127. L'ultimo grande geometra della Scuola di Alessandria è stato PAPPO, il quale probabilmente visse verso il 300 d. C. in quella città. Quantunque di molto inferiore ai tre grandi matematici del periodo aureo, Euclide, Archimede ed Apollonio, pure essendo vissuto in un periodo nel quale gli studi geometrici erano in decadenza, si erge quale gigante fra' suoi contemporanei.

Egli scrisse dei commenti sull'*Almagesto* di Tolomeo e sugli *Elementi* di Euclide, ma queste opere sono andate perdute.

L'unica opera di lui da noi posseduta ha per titolo Συναγωγή, ed è una collezione di scritti sulla geometria. Essa era in 8 libri, ma il primo e parte del secondo sono andati perduti. Sembra di essere stata scritta da Pappo con lo scopo di dare ai geometri del suo tempo una succinta analisi delle opere dei matematici anteriori, e mediante lemmi facilitarne lo studio; ma questi lemmi sono scelti molto liberamente e non sempre collegati alla materia svolta. Però quest'opera è per noi di somma importanza, poichè ci dà accurati sommari delle opere di cui tratta, e molte notizie sui trattati, a noi non pervenuti, dei matematici greci che lo precedettero. Studiando appunto quest'opera di Pappo alcuni matematici del secolo XVIII han tentato di restaurare delle opere perdute dei geometri greci.

128. Citeremo qui alcuni dei più importanti teoremi che trovansi nella *Collezione*, i quali forse sono da attribuirsi all'autore medesimo. Primo fra tutti l'elegante teorema, riscoperto dal Guldino più di 1000 anni dopo (1577-1643), che « il volume di un solido di rotazione eguaglia il prodotto dell'area generatrice per la circonferenza descritta dal centro di gravità di essa ». Secondo

lo Chasles, questo teorema dovette essersi presentato ai predecessori di Pappo nelle loro ricerche sul centro di gravità delle figure; ma è merito di questo geometra di averne data una dimostrazione generale. Pappo dimostra ancora, che il centro di gravità di un triangolo coincide con quello di un altro triangolo, i cui vertici dividono i lati del primo in uno stesso rapporto. Nel IV lib. sono nuovi ed eleganti teoremi sulla quadratrice, i quali indicano una profonda conoscenza dell' autore sulle superficie curve. Egli genera la quadratrice nel seguente modo: Tracciata sulla superficie di un cilindro retto circolare un'elica, le perpendicolari all'asse del cilindro condotte dai punti di questa linea formano una superficie plettoide (cioè un elicoide a piano direttore); un piano condotto per una di queste perpendicolari, il quale faccia un conveniente angolo col piano della base del cilindro, taglia la superficie plettoide lungo una curva, la cui proiezione ortogonale sul piano della base del cilindro è la quadratrice (prop. 28). Non meno degno di nota è questo secondo modo di generare la medesima curva:

La superficie di un cilindro avente per base la spirale di Archimede è tagliata in una curva a doppia curvatura dalla superficie di un cono retto circolare, il quale ha per asse la generatrice del cilindro passante pel polo della spirale. Le perpendicolari condotte dai punti di questa curva all' asse del cono, formano una superficie plettoide, la quale è tagliata da un piano passante per una delle dette perpendicolari ed opportunamente inclinato secondo una curva, la cui proiezione ortogonale sul piano della spirale è una quadratrice (prop. 29). Ma ciò che forma un durevole titolo di gloria di quest' ultimo matematico greco è di aver concepito e studiato sulla sfera una curva analoga alla spirale di Archimede, e di averne scoperto una proprietà metrica di somma importanza. Riferiamo le sue parole: « Come nel piano

si genera una spirale, facendo muovere un punto sulla retta che descrive un cerchio, come lo stesso avviene nello spazio, se per esempio si faccia muovere un punto sulla generatrice di una superficie cilindrica o conica, così anche nella sfera si può concepire un modo analogo per descrivere una spiralé. Siano sulla sfera il cerchio massimo EFG e P il suo polo (Fig. 31); da P si de-

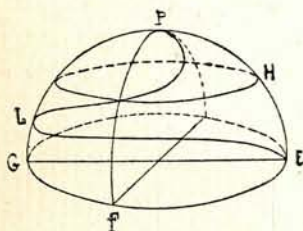
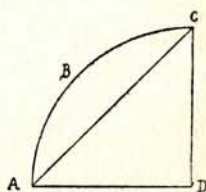



Fig. 31. Fig. 32.

scriva il quadrante di cerchio massimo PHE e lo si faccia ruotare sulla superficie sferica intorno al punto P nel verso FG, finchè ritorni alla posizione iniziale; contemporaneamente un punto si muova sul detto quadrante, partendo da P e giungendo in E; esso descriverà sulla sfera una spirale $PKLE$, la cui proprietà caratteristica è che, descritta una circonferenza massima passante per P (e secante in F la circonferenza EFG ed in K la spirale), essa avrà coll'arco EF lo stesso rapporto che FP ha con KP. Ora dico che considerando sulla sfera un quadrante di cerchio massimo ABC di centro D (Fig. 32) e conducendo la corda AC, la semisfera starà alla superficie compresa fra l'elica $PKLE$ e la circonferenza PHE, come il settore $ABCD$ sta al segmento circolare ABC ».

129. Il Loria nella sua opera « Le scienze esatte nell'antica Grecia » (lib. IV, *Il periodo argenteo della geometria greca,* Modena 1900, pag. 28-29, nota) dimostra nel seguente modo quest'elegante teorema : « Dette ρ, ω le coordinate polari sferiche aventi P per polo e PHE per

asse polare, si vede facilmente che l'equazione della curva di Pappo è $\omega = 4\rho$. D'altronde, supposto eguale ad 1 il raggio della sfera, il differenziale dA dell'area è dato da $dA = d\omega\,(1-\cos\rho) = 4\,d\rho\,(1-\cos\rho)$. Quindi l'area A definita nel testo è data da:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4d\rho\,(1-\cos\rho) = 4\left[\rho - \operatorname{sen}\rho\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\,\pi - 4;$$

onde

$$\frac{\text{sup. emisfero}}{A} = \frac{2\,\pi}{2\,\pi - 4} = \frac{{}^1/_4\,\pi}{{}^1/_4\,\pi - {}^1/_2} = \frac{\text{sup. sett. } ABCD}{\text{sup. segm. } ABC}$$

come appunto volevasi verificare ».

Questa determinazione dell'area di una porzione sferica deve non poco meravigliare, se si riflette che quantunque fosse noto fin dai tempi di Archimede l'equivalenza dell'intera superficie sferica, pure la misura di una sua parte, come quella di un triangolo sferico, era e rimase per lungo tempo ancora ignota.

130. Una quistione di cui molto si occuparono Descartes e Newton e nota col nome di « problema di Pappo », consiste nella determinazione del luogo di un punto tale che, condotte da esso a più rette date in un piano le perpendicolari (o, più generalmente, le rette che fanno con le date un angolo costante) il prodotto di alcune delle perpendicolari stia in un dato rapporto col prodotto delle rimanenti. A Pappo si deve la determinazione del fuoco della parabola; egli suggerì l'uso della direttrice, e per primo studiò la teoria dell' involuzione di punti. A lui ancora si deve la soluzione del problema di inscrivere in un dato cerchio un triangolo i cui lati passino per tre punti dati in linea retta.

131. Poco più giovane di Pappo è Giamblico di Calcide, che visse sotto l' imperatore Giuliano (361-363 d. C.). Egli scrisse un'opera sulla filosofia pitagorica, il cui 4° libro è un commento all'aritmetica di Ni-

comaco. È da osservarsi un importante proprietà dei numeri, fondata, dice Giamblico, sul fatto che i pitagorici chiamavano 1,10,100,1000, ecc. le unità di 1°, 2°, 3°, 4°, ecc. ordine. Da ciò egli deduce che: se si sommano tre numeri successivi, di cui il maggiore è divisibile per 3, e poi si sommano le unità dei diversi ordini della somma, ed indi le unità della seconda somma, e così via, si perverrà al numero 6 ». P. es. $997 + 998 + + 999 = 2994$; $2 + 9 + 9 + 4 = 24$; $2 + 4 = 6$. Reca meraviglia il vedere questa proposizione presso un aritmetico greco, poichè il simbolismo numerico dei greci ben poco si prestava a tali scoperte.

132. Le opere di Timaride, Nicomaco, Teone di Smirne e di altri contengono in vero delle investigazioni di natura algebrica. Ed a riguardo dell' origine dell'algebra sono interessanti gli epigrammi aritmetici che trovansi nella così detta *Antologia Palatina*, la quale contiene un 50 problemi che conducono ad equazioni di 1° grado. Prima dell'introduzione dell'algebra questi problemi erano proposti come enigmi; e uno di questi attribuito ad Euclide e contenuto nell'*Antologia* è il seguente: « Un mulo ed un asino camminavano insieme carichi di grano. Il mulo dice all' asino: se tu mi dai una misura del tuo grano, io ne porterò il doppio del tuo; se invece te ne dò io una, noi porteremo eguali carichi. Dimmi i loro pesi, o mio dotto maestro di geometria ». Ma un più difficile enigma è il famoso *problema bovino*, che si dice proposto da Archimede ai matematici di Alessandria. In esso si chiede di calcolare il numero dei tori e delle giovenche che il Sole possedeva nelle pianure della Trinacria, sapendo che erano distribuiti in 4 gruppi di vario colore. Indicando con x, y, z, t ordinatamente i numeri dei tori di questi 4 gruppi e con y', x', z', t', i numeri corrispondenti delle giovenche, i dati del problema conducono alle equazioni

$$x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) y + z;\ y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) t + z;\ t = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) x + z;$$

$$x' = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\left(y + y'\right);\ y' = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\left(t + t'\right);$$

$$z' = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(x + x');\ t' = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(z + z').$$

Inoltre se p e q rappresentano due numeri interi, si doveva avere altresì

$$x + y = p^2,\ z + t = \frac{q(q+1)}{2}.$$

Dalle prime tre equazioni si ottiene

$$x = \frac{2226}{891} z,\quad y = \frac{1602}{891} z,\quad t = \frac{1580}{891} z,$$

e poichè questi numeri debbono essere interi, dovrà essere $z = 891u$, epperò

$$x = 2226u,\ y = 1602u,\ t = 1580u.$$

Sostituendo questi valori nelle quattro equazioni innanzi scritte e risolvendo si trova

$$x' = \frac{7206360}{4657} u,\quad y' = \frac{4893246}{4657} u,$$

$$z' = \frac{5439213}{4657} u,\quad t' = \frac{3515820}{4657} u.$$

Dovendo essere anche interi i valori di x', y', z', t', dovrà essere $u = 4657v$, epperò si avrà

$$x = 10366482v;\ y = 7460514v;\ z = 4149387v;\ t = 7358060v;$$
$$x' = 7206360v;\ y' = 4893246v;\ z' = 5439213v;\ t' = 3515820v.$$

Sostituendo poi i valori trovati di x e y nell'equazione $x + y = p^2$, si ricava

$$17826996v = p^2,\ \text{ossia}\ p^2 = 2^2.3.\,11.\,29.\,4657v,$$

dalla quale si vede che bisogna porre $v = 3.11.29.\,4657m^2$,

indicando con m una nuova indeterminata. Per conseguenza si ha

$$x = 46\,200\,808\,287\,018m^2; \quad x' = 32\,116\,937\,723\,640m^2;$$
$$y = 33\,249\,638\,308\,986m^2; \quad y' = 21\,807\,969\,217\,254m^2;$$
$$z = 18\,492\,776\,362\,863m^2; \quad z' = 24\,241\,207\,098\,537m^2;$$
$$t = 32\,793\,026\,546\,940m^2; \quad t' = 15\,669\,127\,269\,180m^2.$$

Per determinare ora il valore di m si deve ricorrere all'ultima equazione, la quale diventa

$$\frac{q(q+1)}{2} = 3.7.11.29.353.4657^2.m^2.$$

Moltiplicando per 8 e ponendo $q = \frac{1}{2}(\alpha-1)$ e $2.4657m = \beta$ quest'ultima equazione diventa $\alpha^2 - 4729494\,\beta^2 = 1$.

Si è pervenuto così ad un'equazione indeterminata di secondo grado, cosiddetta equazione di Pell, della quale bisogna trovare le soluzioni tali che i corrispondenti valori di β siano multipli di 2.4657. Dividendo ciascuno di questi valori di β pel prodotto 2.4657, i quozienti rappresenteranno valori di m, e quindi si avranno altrettante soluzioni del dato problema. Si è calcolato che alla minima fra le soluzioni della sopradetta equazione corrisponde un numero di buoi del Sole espresso dal numero 7766 seguito da 206541 zeri. Questo è un numero talmente grande che la Sicilia, anche supposto che fosse in tutta la sua superficie coperta di buoi, non potrebbe contenere.

Questi problemi aritmetici erano molto in voga al tempo di Diofanto e certamente esercitarono una non piccola influenza sul suo spirito.

133. Con Pappo, come abbiamo innanzi accennato, si chiude la serie dei grandi geometri dell'antichità. Molti e molti anni dovranno passare prima che la Geometria possa segnare ancora nuovi progressi: incontreremo qua e là alcuni commentatori di Euclide o di Archimede, ma non più scoperte originali. Però nella prima metà del IV secolo una nuova scienza, l' Algebra,

sorge con Diofanto; ma affinchè essa possa prendere il suo meraviglioso cammino, dovrà attendere che sia fecondata dal genio di Vieta, di Descartes, di Leibnitz, di Newton.

DIOFANTO di Alessandria visse nella prima metà del IV secolo dell'E. V. e morì di 84 anni, se è autentico un epigramma aritmetico sulla sua età attribuito ad un tale Metrodoro ed inserito nella sopradetta Antologia (1). Della sua vita non sappiamo altro. Delle sue opere non ci è pervenuta quella dei porismi, ma possediamo un frammento sui *Numeri poligonali* e 7 libri della sua grande opera sull' *Aritmetica* che dovea constare di 13 libri.

134. Se non teniamo conto del papiro di Ahmes, che contiene una qualche notazione algebrica e la soluzione di semplici equazioni di 1º grado, l'*Aritmetica* di Diofanto è il più antico trattato di Algebra da noi posseduto. In esso è introdotta l'idea di un'equazione algebrica espressa con simboli algebrici: il metodo è puramente analitico e completamente svincolato da ogni ausilio geometrico. Se non fosse scritta in greco, per

---

(1) Eccone la traduzione in versi latini dovuta al Bachet di Méziriac (Parigi, 1621), uno dei primi commentatori dell'opera di Diofanto:

Hunc Diophantus habet tumulum, qui tempora vitae
illius mira denotat arte sibi.
Egit sextantem iuvenis, lanugine malas
vestire hinc coepit parte duodecima.
Septante uxori post haec sociatur, et anno
formosus quinto nascitur inde puer.
Semissem aetatis postquam attigit ille paternae
infelix subita morte peremptus obit.
Quatuor aestates genitor lugere superstes
cogitur, hinc annos illius assequere.

Da qui si vede che indicando con x anni l'età di Diofanto, si ha

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x, \text{ da cui } x = 84.$$

nessuna idea contenutavi si potrebbe argomentare che fosse il prodotto del genio greco, poichè per nulla ci ricorda il classico periodo della matematica ellenica. Fra' matematici suoi concittadini Diofanto sta solo, e se non ci fosse pervenuta la sua opera, avremmo potuto asserire che l'Algebra fosse stata una scienza ignota ai greci.

Per quanto sappiamo, in quest'opera primieramente è enunciata la proposizione che il prodotto di due numeri negativi è positivo, e ciò per eseguire il prodotto di due differenze, come $(x-1)(x-2)$. Però in Diofanto non si trova alcuna idea del numero negativo in sè (per una tale idea bisogna andare presso i matematici indiani) poichè l'espressione p. es. $x-2$ cessa per Diofanto di avere significato se è $x<2$.

135. Diofanto fa uso nella soluzione dei suoi problemi di una sola incognita che rappresenta col simbolo ς′ ovvero ς°′, nel plurale ςς̄ ovvero ςς°ἰ. Le successive potenze dell'incognita dalla seconda alla sesta hanno per simboli δῦ, κῦ, δδῦ, δκῦ e κκῦ e per nomi *quadrato*, *cubo*, *quadrato-quadrato*, *quadrato-cubo*, *cubo-cubo*; non considera potenze dell'incognita con esponente maggiore di 6. Questi termini e simboli non sono mai applicati ai numeri noti, ch'egli chiama *monadi* (simbolo μō) e l'unità stessa è sempre scritta μō α′ ovvero μō μία. I coefficienti sono scritti dopo i simboli, così ςςοἰ κ $=20x$; μō κ′ $=20$. Il segno della sottrazione è la parola λείψει (*meno*), ed il suo simbolo è ⩛, una ψ capovolta e troncata. Il simbolo dell' eguaglianza è ι, l' iniziale della voce ἴσος, ἴσοι (1). In un'espressione i termini negativi sono sem-

(1) In riguardo all'introduzione dei nostri segni possiamo dire che Luca Pacioli (1491) faceva uso di un *p* e di un *m* per *più* e per *meno*; Tartaglia (1556) usava il segno φ per *più*; Vieta ha + e —, anche = e più tardi ∽ per indicare la differenza della quale è incerto il segno; Oughtred per primo usò il segno ×; Harriot (1634) scrisse i fattori di un prodotto l'uno di seguito all'altro senza alcun segno; Descartes usava il segno ∞ per l'eguaglianza, segno che Wallis ha cambiato in =.

pre scritti dopo tutti i termini positivi, e non vi è alcun segno per l'addizione, bastando, per indicare questa operazione, di scrivere i numeri gli uni di seguito agli altri. Così $\kappa^{\bar{\upsilon}}\,\bar{\alpha}\ \bar{\varsigma\varsigma}\ \bar{\eta}\ \pitchfork\ \delta^{\bar{\upsilon}}\ \bar{\varepsilon}\ \mu^{\bar{o}}\ \bar{\alpha}\ \iota\ \varsigma\alpha$ significa $x^3 + 8x - 5x^2 - 1 = x$.

136. Non sappiamo quale sia stato il metodo tenuto da Diofanto nella risoluzione di un'equazione di 2° grado, della quale egli dà semplicemente una radice, sempre positiva e razionale. Così posta l'equazione $84x^2 + 7x = 7$, dice $x = {}^1/_4$. Delle equazioni determinate si occupa nel 1° libro, trattando nei libri rimanenti principalmente delle equazioni quadratiche indeterminate con lo scopo di cercarne una soluzione razionale particolare.

Non poche delle equazioni indeterminate risolute da Diofanto, con l'uso dei nostri simboli, sono di una delle forme:

$$y^2 = a^2x^2 + bx + c,\quad y^2 = ax^2 + bx + c^2.$$

Ponendo nella prima $y = ax + z$ e nella seconda $y = zx + c$, facilmente si può esprimere razionalmente x mediante z, dando a z valori razionali, i quali però non rendano negativo il valore corrispondente di x.

Alla seconda di queste equazioni si riducono le equazioni simultanee, ovvero, secondo l'espressione di Diofanto, l'*equazione doppia*:

$$y^2 = ax + b^2,\quad z^2 = cx + b^2,$$

Infatti, se nelle due equazioni i termini noti non sono eguali, purchè siano due numeri quadrati, si può sempre renderli eguali, moltiplicando ambo i membri di una di esse per un conveniente numero quadrato. Ammesso per brevità che i termini noti siano eguali, sottraendo ed esprimendo x in funzione di z, si ottiene

$$y^2 - z^2 = \frac{a - c}{c}\,(z^2 - b^2)$$

e ponendo $z = t + b$,

$$y^2 = \frac{a}{c} t^2 + \frac{2ab}{c} t + b^2,$$

che è l'equazione voluta.

Diofanto si fa ammirare in quest' opera non solo per metodi generali, ma sopra tutto per la grandissima varietà di artifizi da lui usati, mediante i quali riduce ogni problema ad un'equazione ch' egli sa risolvere, e della quale può quindi dare una sola soluzione positiva e razionale. I matematici moderni, Eulero, Lagrange, Gauss, che hanno intrapreso lo studio dell'analisi indeterminata, non ricavarono alcun vantaggio diretto dall'opera di Diofanto per la ricerca di metodi generali.

137. A dimostrare l' abilità del grande aritmetico alessandrino riportiamo qui due dei suoi problemi, nel primo dei quali si addimostra l'abilità dell'autore nella scelta dell' incognita, e nel secondo si riscontrano due artifizi, l'uno dell'uso del simbolo per l'incognita in diversi sensi e l'altro per una scelta arbitraria dei valori delle incognite, valori che però soddisfano ad alcune condizioni del problema. Facciamo qui uso dei simboli e del linguaggio moderno.

1°. Trovare tre numeri tali che i prodotti di due qualunque di essi aumentati della somma dei rispettivi due fattori siano ordinatamente eguali a numeri dati (lib. V, probl. 38).

Siano a, b, c i tre numeri richiesti, e posto $ab + a + b = 8$, $bc + b + c = 15$, $ac + a + c = 24$, si faccia $b + 1 = x$, epperò $b = x - 1$. Allora per la prima condizione si ha $a = \frac{9}{x} - 1$, per la seconda $c = \frac{16}{x} - 1$ e per la terza $x = \frac{12}{5}$; epperò i numeri richiesti sono $\frac{11}{4}, \frac{7}{5}, \frac{17}{3}$.

2°. Trovare tre numeri a, b, c tali che $a + b + c$ sia

un quadrato, e che siano anche quadrati le somme $a^2 + b$, $b^2 + c$, $c^2 + a$ (lib. IV, probl. 17).

Ponendo $a = x - 1$, $b = 4x$, $c = 8x + 1$, questi valori sodisfano a due delle date condizioni, poichè $(x-1)^2 + 4x = (x+1)^2$, e $(4x)^2 + 8x + 1 = (4x+1)^2$. Ma anche la somma dei tre numeri, la quale è $13x$, dev'essere un quadrato. « Pongasi $13x$ eguale ad x^2 moltiplicato per un numero quadrato, p. es. eguale a $169x^2$; allora $x = 13x^2$ ». Un nuovo significato di x è così introdotto e $13x^2$ è sostituito al posto del primitivo x; epperò i numeri ora saranno $a = 13x^2 - 1$, $b = 52x^2$ e $c = 104x^2 + 1$. Questi valori soddisfano alle condizioni poste nel problema tranne all'ultima, poichè $(104x^2 + 1)^2 + (13x^2 - 1)$ non è un quadrato. Diofanto allora pone questa espressione eguale ad $x^2 (104x + 1)^2$ e trova $x = \frac{55}{52}$.

138. Si vede, come già abbiamo detto, che lo scopo di Diofanto era quello di determinare soluzioni razionali e positive, ma non necessariamente intere; perciò la denominazione di *equazioni diofantee* data ad equazioni indeterminate di 1° grado, delle quali si cercano le soluzioni intere, riposa su un errore. L'editore di Diofanto nel sec. XVII, Bachet de Mériziac, prese occasione dai problemi di questo libro per trattare egli la questione delle soluzioni intere, questione del resto già risoluta, come vedremo, dai matematici indiani.

139. La scuola alessandrina va a grandi passi declinando. Teone di Alessandria, il quale vi fece delle osservazioni astronomiche nel 365 e 372, vi insegnò e preparò probabilmente per libro di testo della sua scuola un'edizione degli *Elementi* di Euclide con note. Annotò anche l'*Ottica* del medesimo autore e scrisse un commentario sull'*Almagesto*, importante per le molte notizie storiche contenutevi e specialmente per una nota sull'aritmetica greca. Sua figlia Ipazia, celebrata

per la sua bellezza e per la sua modestia, ritenuta superiore al padre per il suo sapere filosofico e matematico, chiude la serie degl' insegnanti di merito della scuola alessandrina. A noi non è pervenuta alcuna sua opera, ma si vuole che abbia commentato le opere di Apollonio e di Diofanto. Vittima della scienza, morì nel 415 dilapidata da una folla ubriaca di superstizione religiosa in una sommossa istigata dal patriarca Cirillo.

140. La scuola neo-platonica di Atene sotto Siriano attrae ma per poco l'attenzione dello studioso della storia della matematica presso i Greci, poichè nell' interesse della filosofia platonica vi fu in essa un certo risveglio nello studio della geometria. E PROCLO (410-485), il successore di Siriano, dopo di avere studiato ad Alessandria, scrisse il suo Commento agli *Elementi* di Euclide, del quale ci rimane quanto si riferisce al 1° libro, che contiene la massima parte delle nostre conoscenze sulla storia della geometria greca. Il suo discepolo MARINO DI NEAPOLI, che fu anche alla testa della scuola ateniese, scrisse la vita del suo maestro e la prefazione ai *Dati* di Euclide. Gli successe ISIDORO, maestro di DAMASCIO DI DAMASCO, a cui si attribuisce il XV libro degli *Elementi*, ed anche di EUTOCIO DI ASCALONA, il commentatore di Archimede e di Apollonio. Con Damascio insegnò nella scuola ateniese SIMPLICIO, autore del commento all'opera *De Coelo* di Aristotele; ma l'imperatore Giustiniano, che era sulla via di convertirsi al cristianesimo, non volendo più permettere ai pagani l'insegnamento, nel 529 decretò la chiusura di quella scuola. Però Alessandria dava ancora qualche segno di vita coi commenti sull'aritmetica di Nicomaco fatti da ASCLEPIO DI TRALLE e GIOVANNI FILOPONO. Ma la fine va rapidamente avvicinandosi. Maometto fugge dalla Mecca nel settembre del 622, muore nel 632 e i suoi successori si preparano colla spada a fondare un grande impero: colla presa di Alessandria nel 640, cessa in quella

città ogni alito di scienza, e nel mondo greco si addensano sempre più le tenebre.

141. Prima di chiudere questo rapido cenno sulla storia della matematica greca, volgiamoci indietro per riassumere i progressi che la scienza dell' estensione deve al genio Ellenico.

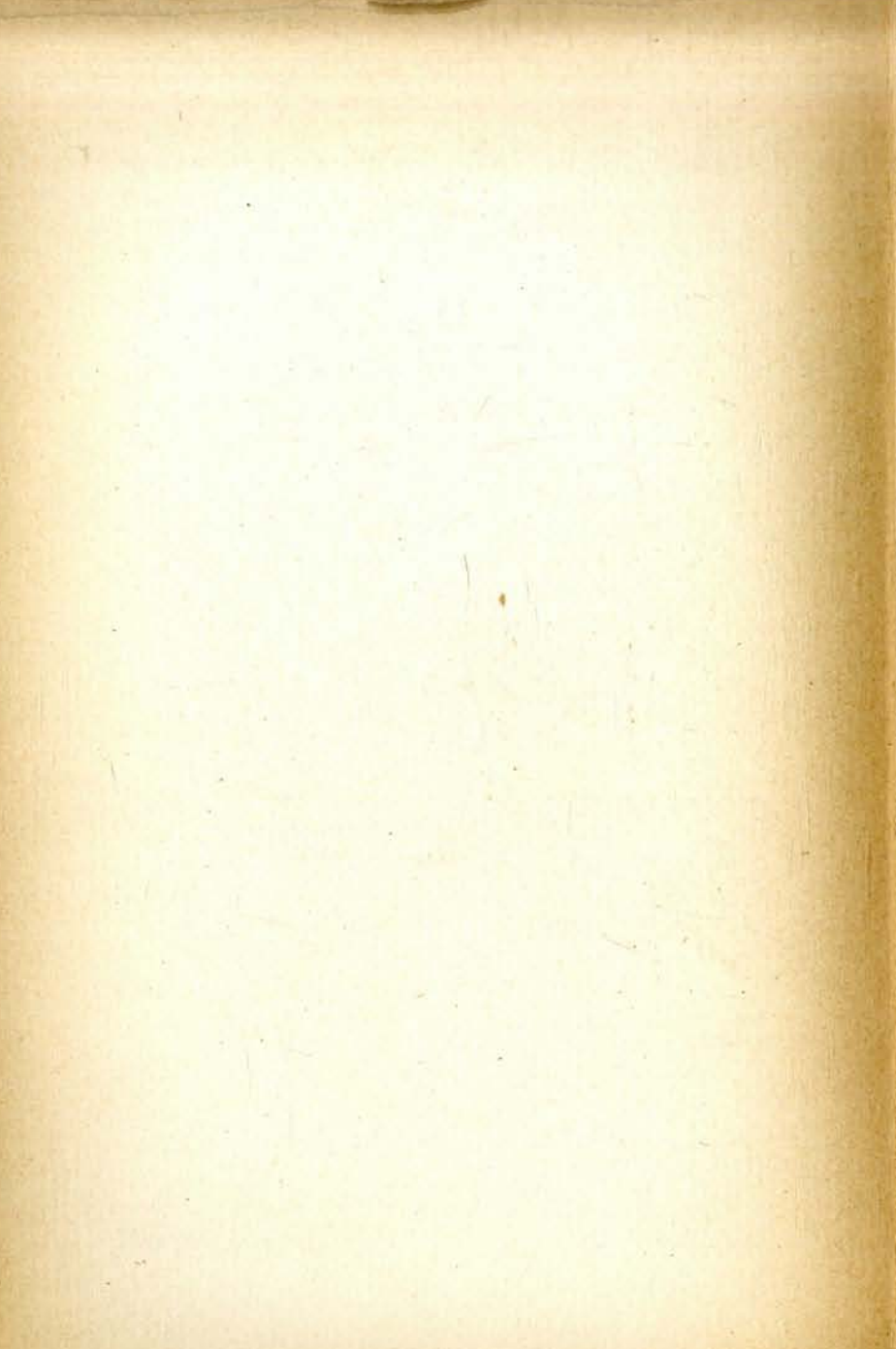
Talete per primo portò fra' Greci le conoscenze geometriche degli Egiziani, conoscenze che poi Pitagora nella sua scuola aumentò.

Avendo questi inoltre osservato che ogni proposizione intorno a relazioni fra linee, o fra grandezze continue, avea la sua analoga nelle relazioni di numeri, o grandezze discrete, e viceversa, iniziò lo studio della teoria dei numeri con metodo deduttivo, introducendo una nomenclatura del tutto geometrica. Da questo tempo gli studî della Geometria e dell'Aritmetica dovettero andare di pari passo, ma la storia della teoria dei numeri, in questo periodo, è per noi molto più oscura di quella della Geometria.

Nel V sec. a. C. lo studio della matematica dall'Italia si trasportò in Atene. Ivi Ippocrate volse la sua mente alla geometria del cerchio, che Pitagora avea negletta per quella delle figure rettilinee, e trasformò il problema della duplicazione del cubo in un problema planimetrico; Platone incitò allo studio della stereometria e diè norme per il metodo analitico. I successori di Platone iniziarono lo studio delle coniche e di altre curve.

Intorno al 300 a. C. la matematica emigrò ad Alessandria ove nel secolo successivo raggiunse il suo più alto sviluppo. Nei secoli posteriori non si fece che commentare le opere dei sommi del periodo aureo. Ma durante questo tempo l'Astronomia fece rapidi progressi con Eudosso, Aristarco, Eratostene ed altri fino ad Ipparco, e per essa sorse la necessità di conoscere la misura di angoli o di lunghezze, e troviamo quindi verso

il 130 a. C., ai tempi di Erone e di Ipparco, la geometria applicata alla misura di figure per determinare la misura di qualche elemento incognito. Così sorse la Trigonometria e s'introdusse anche un metodo elementare di calcolo algebrico. Per questi calcoli gli Egiziani ed i Semiti, i quali ormai possédeano i risultati della scienza deduttiva greca, aveano una speciale attitudine; e lo studio della teoria dei numeri, pósta di moda dai neoplatonici e dai neopitagorici, cambiò conseguentemente il suo carattere per opera appunto di uomini di origine egiziana o semitica.

Caduto l'Egitto in potere degli Arabi e anche prima di loro distrutta la famosa biblioteca dei Tolomei, deposito prezioso di tutte le produzioni del genio e dell'erudizione, la barbarie avvolse lo spirito umano in dense e lunghe tenebre. Ma gli stessi Arabi, dopo uno o due secoli, intrapresero la restaurazione della scienza e ci trasmisero sia il testo sia la traduzione delle opere dei matematici greci, che erano state risparmiate dal fanatismo delle generazioni precedenti.

CAPITOLO IX.

I ROMANI.

142. Quanto grande sia il contrasto fra il genio greco ed il genio romano appare principalmente dalla storia della scienza esatta presso l' uno e l' altro popolo. Infatti vediamo che non solo i Romani ignoravano l'alta geometria di Archimede e di Apollonio, ma anche gli *Elementi* di Euclide. Quel poco di matematica a loro noto non veniva punto dai Greci ma da una sorgente più antica; ed è molto probabile che essi abbiano derivato dagli antichi Etruschi il loro simbolismo numerico e le conoscenze di geometria pratica da essi possedute.

143. Tito Livio, riferendo una notizia data da Cincio Alimenta, racconta che in Volsinii (ora Bolsana) si vedevano chiodi conficcati nel tempio di Norcia, dea Etrusca, come indizio degli anni trascorsi e che i Romani ogni anno conficcavano un chiodo allo stesso fine nel lato destro del tempio di Giove Ottimo Massimo, dalla quale parte sorgeva il tempio di Minerva.

Un meno primitivo modo di indicare i numeri, probabilmente anch'esso di origine etrusca, era una notazione simile alla conosciuta *notazione romana*. In questa notazione le lettere I, V, X, L, C, D, M valevano ordinatamente 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 (quest'ultimo numero era anche rappresentato dal segno ∞): gli ordini di unità superiori a 1000 erano poi rappresentati da segni numerali più o meno complessi, cioè: 10000 = CCIↃↃ, 100000 = = CCCIↃↃↃ, 1000000 = C∞Ↄ. Si adoperavano anche i

segni IↃↃ per 5000, IↃↃↃ per 50000 e CJ per 500000. Da qui si vede che l'ordine di unità più elevato che sia rappresentato da un segno alfabetico semplice è 1000, e il numero più alto che sia rappresentato da un segno complesso è 1000000, il quale è precisamente l'unità della settima ed ultima colonna dell'*abaco* romano, come in seguito vedremo.

Nella notazione dei Romani, come in quella della massima parte dei popoli che non fanno uso del valore di posizione, i segni di numeri più piccoli, posti alla destra di segni di numeri più grandi, indicano l'addizione da fare su questi numeri. Presso i Romani inoltre si riscontra un principio, che non si riscontra in alcuna altra notazione, cioè che il numero più piccolo, il cui segno è posto alla sinistra del segno di un numero più grande, devesi da questo sottrarre. Però la sottrazione non ha mai luogo davanti al segno M, ed il segno di un numero minore, posto alla sinistra di M, fa invece da moltiplicatore: così XM = 10000, CM = 100000. L'espressione MM indica poi o 2000 per addizione o 1000000 per moltiplicazione, secondo i casi.

Fin dall'epoca di Plinio il Vecchio alla lettera M fu sostituito o una linea orizzontale al di sopra o un punto alla destra del gruppo di segni indicanti le migliaia; così $\overline{\mathrm{XXX}}$ = 30000; però presso Plinio il numero sottostante alla linea o alla sinistra del punto rappresenta o migliaia o centinaia, secondo questa legge: se di due gruppi consecutivi di lettere numerali romane il gruppo a destra ha centinaia, l'unità del gruppo a sinistra vale mille volte l'unità del gruppo a destra; ma se il gruppo a destra ha solo decine od unità semplici, l'unità del gruppo a sinistra vale cento volte l'unità del gruppo a destra. E questa legge si applica sempre, anche quando vi sono più di due gruppi. Così $\overline{\mathrm{XXIII}}$. LX = 2360 e non 23060, mentre $\overline{\mathrm{XXIX}}$.

CCCXC = 29390; analogamente $\overline{\text{LXI}}$.XXXV.CCCC= 6135400 e non 61035400.

144. I Romani eseguivano le operazioni di calcolo facendo uso o delle dita o dell'abaco o di tavole preparate allo scopo.

Il simbolismo numerico sulle dita era noto da epoca remotissima, poichè Plinio ci racconta che Numa fece innalzare una statua a Giano bifronte, le cui dita indicavano il numero 365 (355?) dei giorni di un anno. Da molti altri passi di scrittori romani si argomenta l'uso delle dita come ausilio pei calcoli. Ed è noto che un simbolismo numerico digitale era in uso non solo in Roma ma anche nella Grecia ed in Oriente al principio dell' era cristiana, e fu continuato in Europa durante il Medio-Evo. Non sappiamo nè quando nè dove sia stato inventato.

Il secondo mezzo ausiliare pei calcoli era l' abaco, oggetto in Roma di un insegnamento elementare; e molti scrittori affermano che la specie di abaco più comunemente in uso era una tavoletta coperta di polvere e poi divisa mediante rette in colonne, nelle quali si ponevano, per indicare le diverse unità del numero da rappresentare, tante petruzze (*calculi,* da cui le parole *calcoli*, *calcolare*) quante erano necessarie.

I Romani usavano anche un'altra specie di abaco, il quale consisteva in una tavoletta metallica con delle

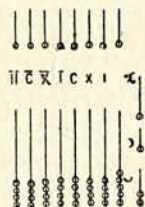



Fig. 33. Fig. 34.

scanalature, nelle quali potevano scorrere dei bottoni mo-

bili. Con un tale abaco si potevano indicare tutti i numeri interi da 1 a 9999999, come anche alcune frazioni. Nelle figure 33 e 34 le linee rappresentano le scanalature ed i cerchietti i bottoni. I numerali romani indicano il valore di ciascun bottone nella corrispondente scanalatura inferiore, mentre il bottone nella scanalatura più piccola superiore vale 5 volte di più. Così $\overline{\text{II}} = 1000000$, quindi ciascun bottone nella prima scanalatura più lunga a sinistra, quando è portato in alto, vale 1000000, e il bottone nella scanalatura superiore più piccola corrispondente, se portato in alto, 5000000. Analogamente pei bottoni delle altre scanalature.

Ciascuno dei 5 bottoni dell' ottava scanalatura inferiore, contandosi da sinistra, al disotto del punto, rappresenta $^1/_{12}$, mentre il bottone della scanalatura superiore corrispondente indica $^6/_{12}$. Nelle tre piccole colonne a destra, il bottone della scanalatura superiore indica $^1/_{24}$, quello della media $^1/_{48}$ ed infine quello della inferiore $^1/_{72}$. La figura 33, rappresenta la posizione dei bottoni prima d'iniziare l'operazione; la figura 34, con alcuni bottoni portati alla parte superiore delle rispettive scanalature, rappresenta il numero $852\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{24}$. In questa figura perciò si vede che hanno valore un solo bottone sopra C (= 500) e 3 bottoni sotto C (= 300); un solo bottone sopra X (= 50); 2 bottoni sotto I (= 2); 4 bottoni sotto il punto $\left(= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}\right)$ e finalmente il bottone nella piccola scanalatura superiore a destra, che vale $\frac{1}{24}$.

145. Supponiamo ora che vogliasi aggiungere $10318\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{48}$ a $852\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{24}$. Si può a piacere iniziare il calcolo con le unità a destra o a sinistra del numero, e il calcolo più difficile è l'addizione delle frazioni. In questo

caso il bottone che vale $\frac{1}{48}$, il bottone sopra il punto e tre bottoni sotto il punto debbono portarsi in alto delle rispettive scanalature per indicare la somma: $\frac{1}{3}\,\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{48}=\frac{9}{12}\,\frac{1}{48}=\frac{3}{4}\,\frac{1}{48}$. Aggiungendo 8 a 2, avendosi 10, si portano inferiormente i 2 bottoni che sono alla parte superiore della scanalatura sotto I nella figura 34 e si muove un solo bottone nella scanalatura inferiore a X; dovendosi poi aggiungere 10, si muove un altro bottone nella medesima scanalatura inferiore a X; per aggiungere poi 300 ad 800 si fanno discendere il bottone della scanalatura superiore a C e 2 dei bottoni nella corrispondente scanalatura inferiore, lasciando in questa un solo bottone in alto, ed inoltre portando in alto un bottone nella scanalatura inferiore ad $\overline{\text{I}}$; finalmente per aggiungere 10000 si porterà in alto un solo bottone nella scanalatura inferiore a $\overline{\text{X}}$ e così si avrà la somma $11170\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{48}$.

Per eseguire la sottrazione si opera analogamente. La moltiplicazione poteva essere eseguita in vari modi. Nel caso p. es. di $25\frac{1}{3}\times 38\frac{1}{2}\,\frac{1}{24}$, l'abaco avrebbe potuto segnare successivamente i seguenti valori:

$$600(=20.30),\ 760\ (=600+20.8),\ 770\ \left(=760+\frac{1}{2}.20\right),$$

$$770\,\frac{10}{12}\left(=770+\frac{1}{24}.20\right),\ 920\,\frac{10}{12}\left(=770\,\frac{10}{12}+30.5\right),$$

$$960\,\frac{10}{12}\left(=920\,\frac{10}{12}+8.5\right),\ 963\,\frac{1}{3}\left(=960\,\frac{10}{12}+\frac{1}{2}.5\right),$$

$$963\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{24}\left(=963\,\frac{1}{3}+\frac{1}{24}.5\right),\ 973\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{24}\left(=963\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{24}+\frac{1}{3}.30\right),$$

$$976\frac{2}{12}\frac{1}{24}\left(=973\frac{1}{2}\frac{1}{24}+8.\frac{1}{3}\right),\ 976\frac{1}{3}\frac{1}{24}\left(=976\frac{2}{12}\frac{1}{24}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}\right),$$
$$976\frac{1}{3}\frac{1}{24}\frac{1}{72}\left(=976\ \frac{1}{3}\frac{1}{24}+\frac{1}{3}\frac{1}{24}\right).$$

Per la divisione infine l' abaco era adoperato per indicare il resto della sottrazione del divisore o di un multiplo conveniente del divisore dal dividendo. Il processo era complicato e difficile.

146. Questi metodi della moltiplicazione e della divisione sull'abaco mostrano come si potevano eseguire queste due operazioni mediante una serie di successive addizioni e sottrazioni. Però devesi supporre che per tali operazioni facevasi uso di tavole di moltiplicazione ed inoltre che queste due operazioni su numeri alquanto grandi non potevano essere eseguite che da un calcolatore molto esperto. Le difficoltà erano spesso ovviate dall'uso di tavole aritmetiche, ove trovavansi la somma, la differenza e il prodotto di due numeri, e tavole di questa specie furono preparate da Vittorio di Aquitania, le quali contengono anche una speciale notazione per le frazioni, che continuò ad essere usata anche nel medio-evo.

147. Presso i Romani il calcolo delle frazioni occorreva maggiormente nel computo delle monete; ed essi preferivano le frazioni duodecimali, poichè essendo più spesso usata negli affari la divisione dell'unità in 2, 3, 4 e 6 parti eguali, le dette frazioni davano più facili espressioni per queste parti. Perciò presso i Romani l'unità, *as,* in origine una moneta di rame pesante una libra, era divisa in 12 parti eguali, *unciae;* e le frazioni $^2/_{12}$, $^3/_{12}$,..., $^{11}/_{12}$ avevano nomi speciali. L'addizione e la sottrazione di queste frazioni si eseguivano molto facilmente, ed il calcolo sulle frazioni era la parte più importante dell'insegnamento dell'Aritmetica nelle scuole.

148. I problemi d'interesse erano molto antichi presso i Romani, le cui leggi sull'eredità davano origine a nu-

merosi esempi di calcolo. Citiamo il seguente: un tale morendo e lasciando la moglie incinta, volle che il suo avere fosse così diviso: se nascesse un bambino, il figlio dovea ricevere i $^2/_3$ e la moglie $^1/_3$ dell'eredità; se invece una bambina, questa $^1/_3$ e la moglie $^2/_3$. Ora avvenne che nacquero due gemelli, un bambino ed una bambina e si dovette ricorrere al celebre giurista romano Salviano Giuliano per decidere come dividere l'eredità. Questi sentenziò che doveasi del tutto fare 7 parti eguali, delle quali 4 spettavano al figlio, 2 alla moglie ed una sola alla figlia.

149. Consideriamo ora brevemente la Geometria dei romani, se pur tale puossi dire quell'insieme di regole pratiche, spesso non esatte, che costituivano la sola conoscenza geometrica del romano agrimensore. Quantunque l'agrimensura fosse tenuta in gran pregio presso i Romani fin dal tempo dei Re, negli scritti pervenutici su tale materia non si trovano nè definizioni, nè concetti fondamentali, e le regole stesse non sono punto formulate, ma si debbono dedurre da esempi numerici mancanti di precisione e di chiarezza. Da questi scritti si riceve l'impressione come se fossero stati compilati migliaia di anni prima della geometria greca. In essi trovansi le regole pel calcolo delle aree, ma limitatamente alle figure più semplici, e di rado è applicato il teorema di Pitagora; la formola di Erone per calcolare l'area di un triangolo in funzione dei lati; quella approssimata $\frac{13}{30}a^2$ per l'area di un triangolo equilatero di lato a; ma accanto a queste trovansi le formole errate $\frac{1}{2}(a^2+a)$ pel detto triangolo, $\frac{1}{2}(3a^2+a)$ pel pentagono regolare, $\frac{1}{2}(4a^2+a)$ per l'esagono regolare e pei poligoni regolari di 7, 8, 9, 10, 11 e 12 lati la formola

$\frac{1}{2}[(n-2)a^2-(n-4)a]$, ove a è il lato ed n il numero dei lati. Che queste formole siano tutte errate si scorge a colpo d'occhio poichè non omogenee.

Anche nelle operazioni, che gli agrimensori romani facevano sul terreno, si addimostra la loro mancanza di conoscenze geometriche. Per valutare l'estensione di un fondo o di una città, essi si accontentavano solo di misurarne con la cordicella la lunghezza del circuito, anche quando questo era del tutto irregolare. Ed è notevole al riguardo il seguente brano dell' opera di M. Fabio Quintiliano (*Inst.*, libro I, 10) che visse dal 35 al 93 dell' Era cristiana: « Chi non presterebbe ascolto ad uno che dicesse essere l'area di una figura misurata dal suo perimetro? Eppure ciò è falso, poichè vi contribuisce molto la forma; e i geometri biasimano gli scrittori di storia che credettero di poter calcolare l' estensione di un'isola dal tempo impiegato a percorrerne le coste colla navigazione. L'area di una figura è tanto maggiore quanto più essa si avvicina alla forma perfetta. Se quindi il perimetro dell'isola è una circonferenza, l'area da questa limitata è maggiore di quella di un quadrato, per una stessa estensione delle coste, perchè il circolo è la figura più perfetta. Il quadrato alla sua volta, ha, per lo stesso perimetro, un'area maggiore di quella del rettangolo, ed il triangolo equilatero un'area maggiore di quella del triangolo scaleno ».

Le altre operazioni sul terreno si limitavano a livellazioni mediante il livello ad acqua, ad allineamenti ed al tracciato di angoli retti; ciò eseguivasi con uno strumento detto *groma*, da cui il nome di *gromatici* agli agrimensori romani. Questo istrumento che probabilmente i Romani conoscevano fin dal III sec. a. C., constava di due regoli orizzontali incrociantisi ad angolo retto, muniti alle loro estremità di fili a piombo e portati da un

bastone terminato inferiormente con base metallica (1).

150. Presso i Romani, fino agli ultimi tempi della rovina dell'impero, non vi è traccia di vera matematica pura: si possono citare però i nomi di alcuni che isolatamente si dedicarono in parte a questa scienza. MARCO TERENZIO VARRONE (116—27 a. C.), considerato il più dotto fra' Romani, scrisse sull' aritmetica, la geometria, l'astronomia, la musica e la nautica; ma nessuna di queste opere ci è pervenuta. L' opera *De Architectura* di VITRUVIO, che visse sotto Augusto e Tiberio, ci prova che egli doveva avere delle conoscenze matematiche. Negli scritti di M. FABIO QUINTILIANO troviamo il passo innanzi citato, ove è un breve cenno della teoria degli isoperimetri. Si deve citare ancora, fra coloro che più o meno ebbero delle conoscenze matematiche presso i Latini, SESTO GIULIO FRONTINO (40-103 d. C.), ispettore degli acquidotti di Roma sotto l' imperatore Vespasiano. È autore di due volumi, l' uno *De aquaeductibus urbis Romae*, libri II, l'altro *Stratagematum,* libri IV, opera degna di nota sull'arte militare. Lo Chasles inoltre nella sua *Aperçu historique* (nota XII) attribuisce a questo autore latino un trattato sulla misura delle superficie, ch' egli trovò in un manoscritto dell'XI sec. nella biblioteca di Chartres. Questo frammento di geometria, dice lo Chasles, fa onore all'autore, perchè è da considerarsi come lo scritto più completo che sia uscito dalla penna di un geometra latino. In esso si trovano calcolata l'altezza di un triangolo di lati 13, 14 e 15; la formola dell'area di un triangolo in funzione dei lati; le due formole per co-

---

(1) Questa è la forma del groma inciso sulla tomba di un agrimensore romano, scoperta ad Ivrea, la cui iscrizione è stata pubblicata dal GAZZERA nel vol. XIV della 2. Serie delle *Memorie dell'Acc. di Torino* (Cfr. GIOVANNI ROSSI, *Groma e squadro,* 1877, fig. 3).

struire un triangolo rettangolo in numeri interi, essendo dato per uno dei cateti un numero pari o un numero dispari; l'espressione del diametro del cerchio inscritto in un triangolo rettangolo, ch' esso cioè è eguale alla somma dei cateti diminuita dell' ipotenusa; il calcolo dell'area del quadrato, del parallelogrammo, del rombo e del quadrilatero a basi parallele; il rapporto $^{22}/_{7}$ della circonferenza al diametro ed infine il teorema che la superficie di una sfera equivale a 4 cerchi massimi.

151. Fra' Latini inoltre si sono occupati di matematica LUCIO APULEIO DI MADAURA nella Numidia, nato verso l'anno 130 d. C., che tradusse o meglio parafrasò in latino l'Aritmetica greca di Nicomaco; MARCUS JUNIUS NIPSUS, agrimensore, di cui abbiamo riportato, parlando di un problema attribuito a Talete, la costruzione detta *fluminis variatio;* JULIUS FIRMICUS MATERNUS, siciliano, che scrisse un volume di Astrologia dal titolo *Matheseos*, libri VIII, pubblicato a Lipsia nel 1891; TEODORO MACROBIO che nel suo *Commentarius in Somnium Scipionis* si occupò di matematica ed in quest'opera si trova la prima volta la parola *Ecclittica*; VICTORIUS DI AQUITANIA, che calcolò un nuovo canone pasquale per l' occidente, e di cui si possiede uno scritto dal titolo *Calculus*, pubblicato dal Friedlein nel *Bollettino del Boncompagni* (vol. IV, 1871), ove si calcola con le frazioni e si trova una tavola di moltiplicazione con numeri grandi. Dobbiamo ancora citare MARZIANO CAPELLA, nato in Cartagine nella prima metà del V sec. d. C., autore di un'opera in 9 libri dei quali i due primi, che formano una specie d'introduzione agli altri sette, sono un piccolo romanzo filosofico ed allegorico intitolato: *de Nuptiis Philologiae et Mercurii;* gli altri trattano delle sette arti liberali: la grammatica, la dialettica, la rettorica, la geometria, l'aritmetica, l'a-

stronomia (1) e la musica. Il libro della geometria si riduce ad alcune definizioni delle linee, delle figure piane e dei solidi, la più parte prese dall'Euclide, conservando il loro nome greco, mentre in Cassiodoro la nomenclatura geometrica è latina, ed in Boezio è mista la latina con la greca. L'aritmetica non è che un'imitazione di quella di Nicomaco.

S. Agostino ha scritto intorno alla musica: gli si attribuiscono degli scritti di aritmetica e di geometria, che contengono una semplice nomenclatura. Non va oltre alla nomenclatura anche il trattato di Geometria di Magno Aurelio Cassiodoro (475-570) compreso nel XVI libro della sua opera *De artibus ac disciplinis liberalium litterarum*, una specie di enciclopedia, ove sono trattate la Grammatica, la Rettorica, la Dialettica, l'Aritmetica, la Musica, la Geometria e l'Astronomia.

152. Il più notevole scrittore di questo periodo è Anicio Manlio Torquato Severino Boezio, che nacque tra il 480 e 482 d. C. Era un gran favorito del re ostrogoto Teodorico, che allora dominava in Italia, quando, accusato di tradimento da invidiosi cortigiani, fu imprigionato e poi decapitato nel 524.

In prigione scrisse la pregiata sua opera *De Consolatione philosophiae*. Di lui abbiamo: *De institutione arithmetica* (2 libri), *De institutione musica* (5 libri) ed *Ars geometrica* (2 libri).

L'Aritmetica di Boezio non è che un'imperfetta traduzione dell'opera di Nicomaco, della quale sono omessi i più bei risultati.

Il primo libro della Geometria è estratto dagli *Elementi* di Euclide, e contiene le definizioni, i postulati, gli assiomi e gli enunciati dei teoremi dei primi tre li-

(1) Nell'8º libro si trova il cap. « *Quod Tellus non sit centrum omnibus planetis* », ove Marziano Capella fa ruotare Mercurio e Venere intorno al Sole.

bri senza alcuna dimostrazione. Il secondo libro tratta, mediante esempi numerici, della misura delle figure piane secondo il modo degli agrimensori. Questa opera di Boezio è sommamente importante, poichè fino al XII secolo rimase in occidente come l' unica fonte del sapere matematico.

153. Degno di nota nella Geometria di Boezio è un passo che trovasi verso la fine del primo libro, ove si parla dell'abaco attribuito dall'Autore ai Pitagorici (1). Ivi si apporta un grandissimo miglioramento all' antico abaco, poichè invece delle pietruzze da porre nelle singole colonne, si fa uso di piccoli coni dall'Autore detti *apici,* su' quali sono trascritti i seguenti segni numerali, che rappresentano ordinatamente i numeri da 1 a 9.

(2)

Fig. 35.

Boezio non fa cenno della cifra dello zero che pure trovasi in alcuni manoscritti, nei quali inoltre le cifre riportate hanno nomi diversi, di origine araba o caldea. Non ci fermiamo su questi nomi.

Queste cifre, che hanno una grandissima rassomiglianza con le cifre numerali *Gubar* degli Arabi d' Occidente di origine indiana, sono i progenitori delle nostre cifre. Donde provengono? È questa una questione molto controversa; e qui brevemente accenneremo le varie opinioni emesse.

(1) Inesperti copisti delle opere di Boezio là ove questi parla dell'abaco, da lui appellato *mensa Phytagorea,* non comprendendo il passo, v'inserirono la tavola di moltiplicazione invece di quella dell'abaco, che trovasi nei più antichi e migliori manoscritti. Da qui, come hanno fatto osservare lo Chasles ed il Cantor, è derivato l'improprio nome di *tavola pitagorica* alla tavola di moltiplicazione.

(2) Questi segni nei diversi manoscritti differiscono alquanto da quelli qui riportati, che trovansi nelle opere di Boezio pubblicate per cura di G. Friedlein (Lipsia, 1867, pag. 397).

Alcuni sostennero che Pitagora viaggiò nell' India, ove apprese i segni numerali, usati poi segretamente da' Pitagorici e trascritti in seguito da Boezio. Questa ipotesi è stata però da tutti abbandonata, poichè non vi è alcun documento dal quale possa dedursi questo preteso viaggio di Pitagora o di qualche suo discepolo, e non vi è alcun documento che lontanamente accenni che presso i Greci fossero noti gli apici boeziani, ovvero si usassero segni numerali di qualsiasi forma con l'abaco. Inoltre è improbabile che i segni indiani, dai quali gli apici sono derivati, siano così antichi da rimontare ai tempi di Pitagora. Altri negano l' autenticità della *Geometria* di Boezio od almeno del passo che c' interessa, e sostengono che il libro è stato scritto o nel X o tutto al più nel IX secolo e che quindi gli apici derivano dagli Arabi. A questi si contrappone che Cassiodoro, il quale morì nel 570, nella sua Enciclopedia menziona e l'aritmetica e la geometria di Boezio.

Una terza ipotesi sostenuta dal celebre orientalista F. Woepcke, la quale è forse la più accettabile, è che gli Alessandrini o direttamente o indirettamente conoscessero le nove cifre numerali degli Indiani verso il secondo secolo dell' era volgare e le avessero comunicate prima ai Romani e poi agli Arabi Occidentali. Ritorneremo in seguito su questa questione.

CAPITOLO X.

GL'INDIANI.

154. Mentre la matematica declinava presso il popolo ellenico, era coltivata da un altro popolo, appartenente anch' esso alla razza degli Arii, abitante la regione bagnata dal Gange e dall' Indo. Ma quanta differenza fra' due popoli! All'opposto dei Greci, gl'Indiani erano divisi in caste, e fra queste era riservato il privilegio di dedicarsi agli studi solamente ai Bramini, che si occupavano di religione e di filosofia, ed ai Sciatria che attendevano alla guerra ed al governo; mentre nella Grecia la matematica, come qualunque altra scienza, poteva essere coltivata da chiunque sentiva per essa un qualche trasporto. Inoltre gl'Indiani usavano di porre in versi i loro teoremi, adoperando un linguaggio oscuro e mistico, e se ciò poteva aiutare la memoria di colui che già conosceva la materia, riusciva spesso non intelligibile a chi non era iniziato nella scienza.

Quantunque i matematici indiani dovessero senza dubbio dedurre i loro risultati dal ragionamento, pure nei loro scritti non vi è alcun cenno di una qualsiasi dimostrazione; e ciò costituisce una grandissima differenza fra i loro scritti e quelli dei matematici greci, i quali non solo si studiavano di evitare ogni oscurità di linguaggio, ma giustamente credevano che la dimostrazione facesse parte integrante del teorema enunciato. Nella storia del progresso della matematica si osserva ancora un'altra grandissima differenza fra il genio greco ed il genio indiano: il primo è eminentemente *geometrico*, mentre il secondo è del tutto *aritmetico*; quello

studia la *forma*, questo il *numero*. Quindi il simbolismo numerico, la scienza dei numeri, l'algebra attinsero sul suolo indiano un grado di perfezione che invano si cercherebbe fra' Greci, mentre nella geometria l'Indiano rimase un allievo dei Greci. È vero che la trigonometria ha fatto presso gl'Indiani grandi progressi, ma devesi considerare che essa poggia più sul calcolo che sulla geometria.

155. Questa attitudine per lo studio ed il calcolo dei numeri era talmente insita nella natura stessa del popolo indiano, che non solo la si riscontra nelle opere scientifiche, ma anche in opere che nulla hanno di comune con la matematica. E una prova di ciò si ha nella *Lalatavistara*, una delle più celebri opere della letteratura buddica.

Allorchè il giovane *Sarvarthasidda* (*colui che appaga ogni desiderio*, il quale dovea poi fondare la nuova religione buddica, prendendo il nome di *Buddha = il sapiente*), appartenente alla stirpe dei *Sakya*, figlio di *Suddhodana*, re di Kapilavastu (forse l'odierna Nagar), fu nell'età di prender moglie, gli si destinò la bella *Gopa* (*la signora della terra*). Ma il padre della fanciulla negò il suo consenso, poichè credeva che il giovanetto avesse passata fino allora la sua vita fra l' ozio e la mollezza e non potesse quindi essere che un effiminato e un dappoco, mentre egli voleva che la sua figliuola andasse sposa ad un uomo istruito, esperto nelle armi e abile al governo. Sarvarthasidda, desiderando mostrare che non avea scorso invano gli anni della sua giovinezza, volle misurarsi in un pubblico concorso, al quale presero parte 500 giovani della medesima stirpe: la scrittura, l'aritmetica, la lotta e l'arte di lanciare le frecce formarono la materia del concorso. Dopo molte prove ed esercitazioni il figlio di Suddhodana riuscì vincitore, essendosi mostrato superiore a tutti e peritissimo nelle

scienze e nelle lettere; e così la virtuosa Gopa divenne la moglie del futuro Buddha.

Quasi la metà della descrizione di questo concorso è dedicata all'esame concernente l'aritmetica. Savarthasidda, vinti gli altri concorrenti, è dal padre invitato a misurarsi col grande aritmetico *Ardjuna*, ch' era stato scelto qual giudice del concorso. Interrogato da questo sui mezzi di esprimere i numeri superiori a cento *koti* (un *koti* $= 10^7$), risponde esponendo una scala di numeri in progressione geometrica di ragione 100, il cui ultimo termine è il numero $10^{7+9 \cdot 46}$, ossia il numero formato dall'unità seguita da 421 zeri.

Ardjuna, desiderando quindi d'istruirsi nella scienza superiore del giovane principe, lo prega di far conoscere a lui ed ai giovani Sakya quanti atomi primi vi siano in un *yodiana*, e Sarvarthasidda enuncia una tavola mediante la quale calcola il numero richiesto.

Questo calcolo, riportato nel sacro libro indiano, per la sua analogia richiama alla mente l'*Arenarea* del matematico siracusano (1).

156. Del progressivo sviluppo delle matematiche indiane ben poco sappiamo; i pochi scritti pervenutici ci fanno conoscere la scienza degli Indiani già avanzata, ma nulla ci dicono del cammino fatto per arrivarvi. Quantunque non si possa negare l'influenza della Grecia sulla scienza indiana, pure è ben difficile tracciare le mutue relazioni. È noto che fin da tempo antichissimo relazioni commerciali vi erano fra' due popoli, il greco e l'indiano; e quando l'Egitto passò sotto la dominazione romana, per la via di Alessandria, si

(1) L'intero passo è riportato e discusso nella dotta *Mémoire sur la propagation des chiffres indiens* del Woepcke, inserita nel *Journal Asiatique*, sixième série, T. I, an. 1863. Veggasi *Il Pitagora*, anno VI, pag. 43.

ebbero scambi commerciali anche fra Roma e l' India. Quindi non è assurdo supporre che oltre lo scambio delle mercanzie vi sia stato anche uno scambio delle conoscenze scientifiche, tanto più che la filosofia e la teologia, insegnate dai Manichei, dai Neo-platonici, dai Gnostici, hanno legami innegabili, con le dottrine indiane; ed origine greca hanno alcuni termini tecnici usati dagl'Indiani. Inoltre si può con certezza asserire che l'astronomia indiana ricevè influenza dall'astronomia greca, e che la massima parte delle conoscenze geometriche dei matematici indiani è dovuta all'influenza della scuola alessandrina ed in particolare agli scritti di Erone. Forse in algebra l'Indiano ha dato ai Greci più di quanto ha ricevuto, ed è probabile che Diofanto abbia appreso i primi barlumi di questa scienza dagl'Indiani.

157. Non potendo tracciare, come già abbiamo osservato, i progressi che la scienza esatta ha fatto fin dal suo inizio sul suolo indiano, diamo innanzi tutto un cenno dei matematici a noi noti di quella regione ed indi brevemente diremo intorno alle loro conoscenze.

Il più antico dei grandi matematici, o meglio astronomi, indiani, di cui conosciamo il nome, è ARYABHATTA, che nacque nel 476 d. C. a Pataliputra sul Gange superiore, e che scrisse un'opera dal titolo *Aryabhattiyam*, il cui terzo capitolo è dedicato alla matematica. Però al IV o V secolo, appartiene una opera astronomica, dal titolo *Surya-siddhanta (Scienza del Sole)*, importante, poichè conferma l'influenza della scienza greca sulla scienza indiana, anche prima del tempo di Aryabhatta, che l'ha commentata. Circa cento anni più tardi, la matematica raggiunse nell'India il punto più alto del suo cammino con l'opera *Brahma-sphuta-siddhanta (riesaminato sistema di Brahma)* scritta nel 628 da BRAHMAGUPTA, nato verso il 598: in quest'opera astronomica i capitoli XII e XVIII sono dedicati alla matematica. Durante parecchi secoli successivi non si ha alcun nome da citare fra' matema-

tici indiani: CRIDHARA, che scrisse una *Ganita-sara (Quintessenza del calcolo)*, e PADMANABHA, autore di un'algebra, non hanno portato il più piccolo contributo alla scienza, e si deve pervenire al XII sec. per trovare il nome di BHASKARA ACARYA, nato nel 1114 a Biddur nel Dekkan, il quale nel 1150 scrisse un' opera intitolata *Siddhantaciromani (Diadema di un sistema astronomico)*; ma quest'opera scritta 500 anni dopo quella di Brahmagupta, ben poco a questa aggiunge. I due più importanti capitoli sulla matematica in questa opera sono il *Lilavati* (= *la bellezza,* cioè *la nobile scienza*) ed il *Vijaganita* (= *estrazione di radice*), che trattano di aritmetica e di algebra.

Molto poetica è l'origine del *Lilavati,* ch'è il nome della figlia dell'autore. Questi, avendo osservato che la stella, sotto la quale era nata la sua figliuola, indicava chiaramente che essa era destinata a restare vergine, volendo contrastare col destino, scelse un' ora propizia per maritarla, affinchè, congiunta coi legami dell'imeneo, potesse avere figliuoli e vivere felice. Avvicinandosi l'ora propizia, Bhaskara chiamata la figlia ed il futuro genero, prese il piccolo cilindro perforato di cui si servivano gl'Indiani per misurare il tempo. Si poneva questo cilindro, che aveva un piccolo foro alla parte inferiore, in un vaso contenente acqua, la quale, penetrandovi a poco a poco, faceva finalmente immergere il cilindro, ed il tutto era calcolato in modo che l' immersione avveniva dopo il tempo voluto. Prima di porre il cilindro sull'acqua, Bhaskara aveva chiesto consigli ad uno dei più celebri astrologi dell' epoca, affinchè i due giovani potessero unirsi nell'istante preciso in cui il cilindro s'immergeva. Ma l'amoroso padre aveva contato senza il destino e le cose non andarono come era il suo desiderio. Lilavati, curiosa come tutte le figlie d' Eva, volendo vedere l'acqua entrare nel cilindro, avvicinatasi al vaso, non osservò che una delle perle del suo abito

nuziale s'era staccata ed era caduta per lo appunto nel cilindro. Questa perla alquanto grande andò sventuratamente ad ostruire il foro del cilindro, impedendo così che l'acqua vi penetrasse: il cilindro rimase quindi alla superficie del liquido e l'ora propizia passò per non più ritornare. Il buon padre addolorato, riconoscendo l'inutilità di lottare contro il destino, disse alla sua figliuola: « Scriverò un libro che porterà il tuo nome e che vivrà nei secoli futuri. Una buona rinomanza è una seconda vita e la base della vita eterna ».

Dopo Bhaskara la matematica indiana, confinata esclusivamente nelle scuole dei Bramini, non conta più nella storia delle scienze.

Nel 1881 fu trovata a Bakhshâlî, nel nord-ovest dell'India, un'aritmetica d'ignoto autore; essa è una copia incompleta, forse dell'ottavo secolo, di un manoscritto molto più antico, il quale si suppone rimonti al terzo o quarto sec. d. C.

I capitoli che riguardano la matematica del *Brahmasiddhanta* e del *Siddhantaciromani* sono stati tradotti in inglese da H. T. Colebrooke (Londra 1817); il *Suryasiddhanta* è stato tradotto da E. Burgess ed annotato da W. D. Whitney (New-Haven, 1860).

158. Merito grandissimo degli Indiani è quello di aver inventato il valore di posizione nella numerazione scritta, ed un segno per indicare lo zero; epperò la nostra notazione numerica anzichè chiamarsi, come usualmente si fa, *araba*, dovrebbe dirsi *indiana*, poichè dagl' Indiani gli Arabi l' hanno appresa. Ignoriamo l' epoca di questa geniale invenzione, che tanto progresso ha fatto fare alla scienza dei numeri; ma per l'evoluzione delle idee in generale dobbiamo inferire che questa notazione col suo simbolismo numerico non sorse bella e completa, come Minerva armata dalla testa di Giove. Le nove cifre per scrivere le unità possono essere state introdotte in epoca anteriore all' invenzione

dello zero e del principio di posizione. Questa ipotesi è confermata dal fatto che si riscontra nell'isola di Ceylan una notazione simile a quella indiana, ma senza lo zero e senza il principio del valore di posizione. Sappiamo che la cultura indiana col buddismo fu importata in questa isola verso il terzo sec. d. C., e vi rimase stazionaria, mentre nel continente progrediva; è quindi molto probabile che i numerali di Ceylan formassero l' antica ed imperfetta notazione numerica degl'Indiani. Ivi erano usate 9 cifre per le unità, 9 altre per le decine, una per 100 ed anche una per 1000, e con queste 20 cifre potevansi scrivere tutti i numeri fino a 9999; così p. es. 7436 sarebbe stato scritto coi 6 segni rappresentanti i numeri 7, 1000, 4, 100, 30, 6. Si suppone che originariamente queste cifre, dette singalesiane, come gli antichi numerali indiani, fossero le lettere iniziali dei corrispondenti nomi numerali. Nel 1° capitolo, e quivi soltanto, della sua opera Aryabhatta fa uso di una notazione molto simile alla sopradetta, ma se lo zero ed il principio di posizione erano certamente ignoti a quei di Ceylan, probabilmente erano noti ad Aryabhatta, poichè là ove nel 2° capitolo egli dà le regole per l'estrazione delle radici quadrata e cubica, sembra che dovesse avere una tale conoscenza. Da ciò si argomenta che lo zero ed il principio di posizione siano stati inventati intorno al tempo di Aryabhatta. Si sa inoltre che nelle varie regioni dell'India erano in uso diverse notazioni numeriche, le quali differivano fra di loro, non pel principio, ma solo per la forma delle cifre adoperate; e degno di nota è un sistema simbolico di posizione in cui le cifre non erano espresse mediante aggettivi numerali, ma mediante nomi di oggetti che suggerivano i numeri particolari di cui trattavasi. P. es. le parole: *luna*, *Brahma*, *Creatore*, *forma* rappresentavano 1; *Veda* (poema diviso in quattro parti), *oceano* 4; ecc. P. es. nel *Suryasiddhanta* il numero 1577917828 è espresso da destra a sinistra nel

seguente modo: *Vasu* (una classe di 8 dei), *due*, *otto*, *montagne* (le 7 catene di montagne), *forma*, *cifre* (le nove cifre), *sette*, *montagne*, *giorni lunari* (la metà dei quali è eguale a 15). Quest'uso permetteva di rappresentare un medesimo numero sotto più forme e facilitava la formazione di versi contenenti regole aritmetiche od esprimenti numeri costanti, che dovevansi ritenere a memoria.

159. Dopo l'invenzione dello zero e del valore di posizione, i calcoli numerici erano eseguiti molto facilmente. Nel calcolo, come nella scrittura, gl'Indiani generalmente procedeano da sinistra verso destra; così essi nell' *addizione*, collocati i numeri da sommare in colonne, incominciavano a sommare i numeri della prima colonna a sinistra e quindi, procedendo nell'operazione, facevano le necessarie correzioni. Per es. dovendo sommare 345 con 678 essi operavano nel seguente modo: $3 + 6 = 9$; $4 + 7 = 11$, il che cambia 9 in 10; quindi si cancellava il 9 e si scriveva 10 al suo posto, e poi accanto 1; $5 + 8 = 13$, il che cambia l'1 precedentemente scritto in 2, epperò la somma cercata è 1023. Per la *sottrazione* avevano due metodi: così per eseguire p. es. l' operazione 984—796, essi dicevano 6 da 14,8; 9 da 17,8; 7 da 8,1; ovvero 6 da 14,8; 10 da 18,8; 8 da 9,1, come del resto si usa oggidì. Nella moltiplicazione essi procedevano, come nell' addizione, incominciando da sinistra, e correggendo man mano le cifre precedentemente scritte. Così dovendo moltiplicare un numero di più cifre per un numero di una cifra, per es. 425 per 7, essi procedevano nel seguente modo: $4.7 = 28$; $2.7 = 14$, il che cambia 28 in 29; $7.5 = 35$, epperò aumentavano il 4 di 3, ponendo al suo posto 7; ottenevano quindi il prodotto 2975. Per moltiplicare poi due numeri di più cifre ciascuno, si scriveva il moltiplicando sopra del moltiplicatore e sopra questo il prodotto: l' operazione si eseguiva incominciando a moltiplicare la prima cifra a sinistra del moltiplicatore per il moltiplicando, come si è detto sopra; indi si passava ad operare con

la seconda cifra, e mano mano che si eseguiva l'operazione si correggevano le cifre già scritte del primo prodotto parziale. Così p. es. dovendo moltiplicare 327 per 56, si scriveva 56 sopra 327, come nel quadro della figura 35, e poi si operava nel seguente modo: 5.3 = 15; 5.2=10, il che cambia il 5 già scritto in 6 e si scrive accanto 0 (1); 5.7 = 35, il che cambia lo 0 già scritto in 3 ed accanto si scrive 5; si moltiplica poi per la seconda cifra, riscrivendo il moltiplicando in modo che la sua cifra delle unità cada sotto alla cifra 6 del moltiplicatore, e si ha 6.3 = 18, il che cambia il 63 in 81; 6.2=12, il che cambia il 15 in 27; 6.7=42, il che cambia il 27 in 31 e si scrive accanto 2: si ottiene così il prodotto 18312. Possedendo noi il lusso della carta e della penna per scrivere, difficilmente sapremmo adottare ora questo metodo; ma gl' Indiani calcolavano sopra una tavoletta bianca coperta di arena rossa, sulla quale segnavano le cifre con un'asticella, talchè queste comparivano bianche sopra un fondo rosso; e dovendo essere le cifre abbastanza grandi per potersi distintamente leggere, ed essendo la tavoletta piccola, essi doveano pensare a risparmiare lo spazio più che fosse possibile, il che ottenevano col sopradetto metodo. Gl' Indiani avevano però anche altri metodi per la moltiplicazione, fra' quali quello detto poi dagli Arabi *Sabaka* (*rete*), che ricorda i bastoncini che *Napier* ha inventato

```
    3
    2
  8 1 1
  6 3 2
1 5 0 5 2
      5 6
  3 2 7
    3 2 7
```

Fig. 36

---

(1) Per rappresentare questo metodo nel quadro, abbiamo tirata una lineetta sulla cifra da cancellare e scritto sopra nella medesima colonna la nuova cifra che devesi surrogare. Così facendo le cifre che formano il prodotto finale cioè 1, 8, 3, 1, 2, *cingono* le cancellate, ed è questo per lo appunto il metodo che insegnano i trattati arabi di aritmetica per la moltiplicazione e nel quale il risultato è detto *Al mamhù* (*cassato*), forse per ricordare la sua origine, ch'è indiana.

per facilitare la moltiplicazione e la divisione (1). Quantunque i manoscritti esistenti non ci diano nessuna informazione del come gl'Indiani eseguissero la divisione, devesi però supporre che il metodo insegnato dallo scrittore arabo Alkharizmi sia per lo appunto indiano: in questo metodo si scrivono solamente i residui parziali, cancellando mano mano le cifre iniziali, come si vede nell'esempio della divisione $46468 : 324 = 143 \frac{136}{146}$ riportato nella figura 36.

Fig. 37.

Essi inventarono l' ingegnoso metodo della *prova per* 9 per verificare il risultato delle loro operazioni, prova per essi necessaria, dovendo nel corso dell'operazione cancellare alcune cifre per scriverne altre.

160. Consideriamo ora alcuni problemi aritmetici ed i relativi metodi indiani per la soluzione. Un metodo da essi favorito era quello di *inversione*, descritto laconicamente da Aryabhatta nel seguente modo:

« Moltiplicazione diviene divisione, divisione moltiplicazione; ciò che era guadagno diviene perdita, ciò che perdita, guadagno; inversione ». Ecco un esempio preso dallo stesso Autore per illustrare questo metodo: « Bella fanciulla dagli occhi lucenti, dimmi, se hai ben compreso il metodo d'inversione, qual' è il numero che moltiplicato per 3, aumentato poi dei $^{3}/_{4}$ del suo prodotto, diviso per 7, diminuito di $^{1}/_{3}$ del quoziente, moltiplicato per sè stesso, diminuito di 52, estratta la radice quadrata, aggiuntovi 8 e diviso per 10, dà il numero 2? ». Il procedimento consiste nel principiare con

---

(1) Il NAPIER (1550-1617) parla di questi bastoncini *(Napier's bones)* nella sua *Rhabdologiae* (1617). Vegg. *Il Pitagora* anno I, pag. 4 5.

2 ed operare in senso inverso così: $(2.10-8)^2+52=196$, $\sqrt{196}=14$, $14.\frac{3}{2}.7.\frac{4}{7}=84$, $84:3=28$, numero richiesto. Tutti i problemi presso gl'Indiani rivestono una forma poetica, essendo essi usi a scrivere in versi i libri scolastici. Essi poi risolvevano i problemi d'interesse, di sconto, di società, di alligazione; facevano frequentemente uso della *regola del tre* ed anche del metodo detto di *falsa positio* o *regula falsa*, che consisteva nell'assegnare un certo valore alla quantità incognita, il quale valore, se non esatto, era corretto mediante un processo analogo alla regola del tre; sommavano i termini di una progressione aritmetica e di una progressione geometrica; conoscevano le somme dei quadrati e dei cubi dei primi n numeri della serie naturale; conoscevano le regole per determinare il numero delle combinazioni e delle permutazioni ed anche i quadrati magici.

161. Nel libro di *Bakhshali* troviamo le frazioni scritte col denominatore sotto al numeratore senza la nostra linea di frazione e gl'interi anche come frazioni aventi 1 per denominatore: nei numeri misti la parte intera era scritta sulla parte frazionaria, così p. es. $\begin{matrix}1\\1\\3\end{matrix} = 1\frac{1}{3}$.

I numeri sui quali si dovevano eseguire le operazioni aritmetiche, erano scritti in un rettangolo e per indicare l'eguaglianza si usava la parola *phalain*, abbreviata in *pha*. Per l'addizione faceasi uso della parola *yuta*, abbreviata in *yu*, dopo gli addendi, così p. es. $\boxed{\begin{matrix}5 & 7\\1 & 1\end{matrix}\ yu}$ *pha* 12, cioè $\frac{5}{1}+\frac{7}{1}=12$; per la sottrazione usavasi una specie di croce dopo il sottraendo, come il nostro segno $+$, il quale segno probabilmente era l'antica forma del *k* della voce *kanita* = *diminuito*. La moltiplicazione

non aveva segno particolare e si scrivevano i fattori l'uno di seguito all'altro; così p. es.

$\begin{array}{|cc|}5 & 32 \\ 8 & 1\end{array}$ *pha* 20, cioè $\frac{5}{8} \times \frac{32}{1} = 20$; per indicare il prodotto di 3 fattori eguali ciascuno a $1 - \frac{1}{3}$ ossia $\frac{2}{3}$, si

scriveva $\begin{array}{|ccc|}1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3+ & 3+ & 3+\end{array}$. La divisione era finalmente espressa con la parola *bhâga,* abbreviata *bhâ,* che significa *parte.*

I successivi scrittori perfezionarono questo simbolismo. Essi, come Diofanto, indicavano l' addizione per apposizione; la sottrazione ponendo un punto sul sottraendo; la moltiplicazione facendo seguire i fattori dalla sillaba *bha* della parola *bhavita*, che significa *il prodotto*; la divisione ponendo il divisore sotto il dividendo. Il quadrato era espresso dalla sillaba *va* della parola *varga*, che propriamente significava un gruppo di cose eguali; il cubo dalla sillaba *gha* della parola *ghana = corpo;* e con queste due sillabe, adoperate come simboli, esprimevano la serie delle potenze come appresso :

va = 2ª potenza		*va gha* = 6ª potenza	
gha = 3ª	»	*va va gha ghata*=7ª	»
va va = 4ª	»	*va va va* = 8ª	»
va gha ghata= 5ª	»	*gha gha* = 9ª	» ecc.

Si osservi che mentre in Diofanto i simboli della seconda e della terza potenza si sommano per indicare le potenze superiori, presso gl' Indiani in generale invece si moltiplicano; e qualora si debbano sommare, come per indicare la quinta potenza, questi simboli sono seguiti dalla voce *ghata.* La radice quadrata è indicata dal simbolo *ka* della parola *karana = irrazionale*, posto innanzi al numero.

La quantità nota era detta *rûpakâ* e l'incognita *yâvat tâvat* (*quantum-tantum*) e se occorrevano più incognite, erano indicate con le prime sillabe dei nomi di colori, come se si dicesse incognita bianca o verde o gialla ecc. così *yâ kâ bha (kâlaba = bianco)* significava il prodotto delle due incognite x ed y. Le equazioni erano scritte ponendo il primo membro in una prima linea ed il secondo membro in una seconda linea. P. es. le nostre equazioni

$$10x - 8 = x^2 + 1, \quad -9 = x^2 - 10x$$

sono da Brahmagupta scritte nel seguente modo:

$$\begin{cases} \textit{yâ va } 0 \textit{ yâ } 10 \textit{ rû } \dot{8} \\ \textit{yâ va } 1 \textit{ yâ } 0 \textit{ rû } 1 \end{cases} \text{cioè } 0x + 10x - 8 = 1x^2 + 0x + 1,$$

$$\begin{cases} \qquad\qquad \textit{rû } \dot{9} \\ \textit{yâ va } 1 \textit{ yâ } \dot{1}0 \end{cases} \text{cioè } -9 = 1x^2 - 10x.$$

162. Passando ora alle conoscenze che gl' Indiani avevano dell'Algebra, notiamo che essi furono i primi ad introdurre le quantità negative, dicendo che le positive rappresentano credito e le negative debito, oppure che le prime rappresentano lunghezze in una direzione e le seconde lunghezze nella direzione contraria. Mentre Diofanto non trovava che una sola radice di un'equazione di 2° grado, gl'Indiani indicavano sempre le due radici: così Bascara dà $x = 50$ e $x = -5$ per le due radici dell'equazione $x^2 - 45x = 250$; però aggiunge che « il secondo valore non è in questo caso da prendersi, perchè non conveniente, non approvando alcuno le radici negative ». Bascara inoltre conobbe che il quadrato di un numero positivo o negativo è positivo; che la radice quadrata di un numero positivo ha due valori, l' uno positivo, negativo l'altro; che la radice quadrata di un numero negativo non esiste, poichè esso non è quadrato. È importante un passo dello stesso autore che si riferisce alle operazioni con zero. Una frazione il cui de-

nominatore è zero, egli dice, non subisce alcuna alterazione per quanto grande sia il numero che si aggiunge o si sottrae, come nessun cambiamento avviene nella infinita ed immutabile Deità, quando mondi siano distrutti o creati. Nella estrazione delle radici quadrate o cubiche gl'Indiani facevano uso delle formule $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a + b)^2 = a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$. Essi operavano indifferentemente con numeri razionali od irrazionali; e Bascara insegna di estrarre la radice quadrata dalla somma di un numero razionale e di uno irrazionale mediante la formula

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Inoltre essi spesso passavano dalla considerazione di numeri alla considerazione di figure e viceversa, non facendo differenza fra le grandezze continue e le grandezze discrete, e ciò al contrario dei Greci. E se s' intende per algebra l'applicazione delle operazioni aritmetiche a tutte le specie di grandezze, numeri razionali od irrazionali o grandezze geometriche, devesi concludere che i Bramini dell'Indostan siano stati i veri inventori di questa branca delle matematiche.

163. Nella soluzione delle equazioni determinate forse si possono trovare nelle opere indiane tracce dei metodi diofantei, poichè alcuni termini tecnici mostrano la loro origine greca; ma non può negarsi che gl' Indiani in ciò abbiano superato i Greci, migliorando e generalizzando le soluzioni delle equazioni lineari e quadratiche. Risolvettero ancora equazioni di grado superiore in alcuni casi speciali, quando cioè i due membri dell'equazione si potevano ridurre a potenza, aggiungendo ad entrambi alcuni termini. Ma specialmente nella teoria delle equazioni indeterminate gl'Indiani hanno di gran lunga superato i Greci.

164. Abbiamo già visto che nella soluzione di equa-

zioni indeterminate Diofanto ha mostrato la sua grandissima genialità mediante soluzioni abilissime per casi particolari. Però la gloria di avere inventati metodi generali in questa sottilissima branca delle matematiche spetta agl'Indiani. Inoltre l'analisi delle dette equazioni presso gl'Indiani differisce da quella presso i Greci non solo per il metodo ma anche per lo scopo: i primi miravano a determinare tutte le possibili soluzioni intere, i secondi domandavano solo una soluzione razionale.

Aryabhatta risolve in interi l'equazione lineare $ax \pm by = c$, ove a, b, c sono interi, con la regola detta del *cuttaca* (*polverizzatore*), la quale è identica a quella che oggidì impropriamente dicesi *metodo diofanteo*, ritrovata poi da Bachet de Mériziac e la prima volta comparsa in Europa nel 1624.

Il procedimento di Eulero nel risolvere la detta equazione in numeri interi, riducendo $\frac{a}{b}$ in frazione continua, coincide col procedimento degli Indiani per il calcolo del massimo comune divisore di a e b mediante le successive divisioni. Gl'Indiani forse sentirono la necessità di risolvere queste equazioni pei loro problemi astronomici.

165. Per le equazioni indeterminate di 2° grado della forma $xy = ax + by + c$, gl' Indiani seguivano lo stesso metodo che trovò Eulero nel sec. XVIII, quando ancora ignoravansi le opere dei matematici bramini, e che consiste nello scomporre $ab + c$ nel prodotto di due numeri interi $m.n$ e nel porre $x = m+b$, $y = n+a$, poichè la sopradetta equazione può scriversi sotto la forma

$$(x - b)(y - a) = ab + c.$$

Inoltre risolvettero ancora le equazioni indeterminate quadratiche della forma $y^2 = ax^2 + b$, riconoscendo con grandissima abilità nel caso speciale di $b = 1$ un problema fondamentale della teoria di dette equazioni.

Per dare un'idea del metodo tenuto dagl'Indiani riproduciamo qui la loro soluzione dell'equazione $y^2=ax^2+1$, che molto più tardi, sotto l'improprio nome di *equazione di Pell*, affaticò le menti dei matematici di Europa. Essi, con un procedimento che non si riscontra nell'opera di Diofanto, ottenevano un numero illimitato di soluzioni razionali. Scegliendo arbitrariamente i numeri x_1, y_1, x_2, y_2, determinavano b_1, b_2 in modo da risultare

$$ax_1^2 + b_1 = y_1^2, \quad ax_2^2 + b_2 = y_2^2,$$

da cui $\quad (ax_1x_2 + y_1y_2)^2 - a\,(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = b_1b_2.$

Facendo $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ e quindi $b_2 = b_1$, l'ultima equazione diventa

$$a\,(2x_1y_1)^2 + b_1^2 = (ax_1^2 + y_1^2)^2$$

ovvero, dividendo per b_1^2,

$$a\left(\frac{2x_1y_1}{b_1}\right)^2 + 1 = \left(\frac{ax_1^2 + y_1^2}{b_1}\right)^2, \qquad (\alpha$$

dalla quale si vede che $\dfrac{2x_1y_1}{b_1}$ e $\dfrac{ax_1^2 + y_1^2}{b_1}$ sono valori razionali che risolvono l'equazione proposta. Si può così proseguire, assumendo valori arbitrari per x_1 e y_1, e spesso avviene che si abbiano valori interi per x e y.

Bisogna osservare il caso in cui si ottiene $b_1 = \pm 1$, ovvero ± 2. Se $b_1 = 1$; seguendo il metodo sopraindicato, da una soluzione intera di $ax^2 + 1 = y^2$ se ne può ricavare una seconda, una terza, ecc.; per $b = -1$ ovvero ± 2, la (α darà anche in questo caso una soluzione intera della data equazione, poichè essendo $y_1^2=ax_1^2\pm 2$, sarà $ax_1^2 + y_1^2 = 2ax_1^2 \pm 2$, ossia $ax_1^2 + y_1^2$ un numero pari.

Se però per un dato valore di a i tentativi fatti non conducono ad un'eguaglianza della forma $ax^2+b=y^2$ con $b = \pm 1$ ovvero ± 2, allora gl' Indiani faceano uso

del metodo *ciclico* per ridurre il valore di b, metodo che molto più tardi ha ritrovato il Lagrange.

166. La geometria indiana è di gran lunga inferiore alla geometria greca: in essa non si trovano nè definizioni, nè postulati, nè legame logico delle proposizioni, nè vere dimostrazioni come in Euclide; ciascun teorema sta da sè. Gl'Indiani studiavano più che altro le relazioni metriche delle figure per la loro applicazione nella vita pratica; e quindi dovrebbesi concludere che gl'Indiani non ebbero una scienza della geometria nel senso dei Greci.

Lo Charles in un accurato studio della parte geometrica delle opere di Bramagupta e di Bascara (1) dimostra che ivi sono trattate soltanto alcune teorie geometriche e specialmente quella del quadrilatero inscritto in un cerchio, mentre prima era opinione che le dette opere contenessero tutti gli elementi di Geometria o quei teoremi sui quali poggiava la scienza indiana. Accenniamo qui brevemente le opere geometriche degl' Indiani a noi pervenute.

167. La Geometria di Aryabatta ci ricorda l'opera di Erone di Alessandria ed hà molti punti con la Geometria degli antichi Egiziani e del *Manuale di Ahmes*. Vi si legge che il volume di una piramide triangolare è eguale al semiprodotto della base per l'altezza e quello della sfera al prodotto di un cerchio massimo per la radice quadrata di esso; però accanto a questi teoremi errati si trova un valore molto approssimato del rapporto della circonferenza al diametro. Egli dice: « aggiungete 4 a 100, moltiplicate per 8, aggiungete ancora 62000; ecco per un diametro di due miriadi la lunghezza approssimata della circonferenza ». Ciò fa $\pi = \frac{62832}{20000} = 3,1416$.

(1) *Aperçu historique*, nota XII.

Da un commento del *Lilavati* si può argomentare che Aryabhatta sia pervenuto a questo valore approssimato, seguendo la via di Archimede, cioè usando la formola che dà il lato di un poligono regolare di $2n$ vertici mediante il lato del poligono regolare di n vertici inscritto nello stesso cerchio, partendo dal lato dell' esagono e calcolando fino al lato del poligono di 384 lati. Da qui si deve dedurre che questo procedimento di Archimede, seguito poi da Tolomeo, da Alessandria sia passato nell'India, ove prima di Aryabhatta per una antica tradizione si poneva $\pi = 3$ o meglio $\pi = \sqrt{20}$.

168. Sono ben pochi gli enunciati completi delle proposizioni che trovansi nella Geometria di Bramagupta, poichè nella massima parte di essi mancano le condizioni necessarie alle quali devono sodisfare le figure che si studiano. Secondo lo Charles lo scopo dell' Autore è la soluzione dei seguenti 4 problemi: 1° Calcolare l'area di un triangolo in funzione dei lati ed il raggio del circumcerchio; 2° Costruire un triangolo di cui l'area, il raggio del circumcerchio ed i lati siano tutti espressi da numeri razionali; 3° Di un quadrilatero inscrittibile calcolare in funzione dei lati l' area, le diagonali, le perpendicolari, i segmenti che queste rette determinano le une sulle altre con le loro intersezioni ed il diametro del circumcerchio; 4° Costruire un quadrilatero di cui l'area, le diagonali, le perpendicolari, i loro segmenti ed il diametro del circumcerchio siano espressi tutti mediante numeri razionali.

Nei primi 18 paragrafi trovansi questi problemi completamente risoluti. Nel paragrafo 21 trovasi dapprima l'antico teorema egiziano errato che l'area di un triangolo e di un quadrilatero è il prodotto delle semisomme dei lati opposti, e poi il bellissimo teorema che dà l'area di un triangolo o di un quadrilatero (inscritto) in funzione dei lati così enunciato: « Scritta quattro volte la semisomma dei lati, se ne sottraggano successivamente

i lati e se ne faccia il prodotto: la radice quadrata di questo prodotto è l'area esatta della figura ». La proposizione 27 dice che il raggio del circumcerchio di un triangolo è uguale al prodotto di due lati diviso pel doppio dell'altezza corrispondente al terzo lato, e nel § 22 l'Autore insegna a calcolare nello stesso modo di Erone i segmenti che l'altezza di ún triangolo determina sulla base, conoscendo i tre lati.

Le proposizioni che riguardano il cerchio sono solamente quattro. 1° Se d è il diametro ed r il raggio di un cerchio, in pratica la circonferenza è eguale a $3d$ e l'area del cerchio a $3r^2$; ma per valori più esatti si prenda la circonferenza eguale a $d\sqrt{10}$ e l'area del cerchio a $r^2\sqrt{10}$: ciò corrisponde a prendere $\sqrt{10} = 3{,}162$ per valore approssimato di π. 2° In un cerchio la semicorda è eguale alla radice quadrata del prodotto dei due segmenti del diametro ad essa perpendicolare. 3°. La freccia, cioè il segmento minore del diametro perpendicolare ad una corda, è eguale alla semidifferenza fra il diametro e la radice quadrata della differenza fra i quadrati del diametro e della corda; in due cerchi intersecantisi sottraendo dai due diametri l'*erosione* (1), moltiplicando i resti per essa e dividendo i prodotti per la somma dei resti, si hanno ordinatamente le due frecce. 4°. Il quadrato di una corda diviso pel quadruplo di uno dei segmenti e aumentato del segmento stesso è eguale al diametro. Questo è il contenuto della sezione IV; nella sezione V si trovano le misure del prisma e della piramide e un metodo pratico per la misura approssimata di un corpo irregolare; nelle altre tre sezioni successive vi sono regole per misurare approssimativamente cumuli di pietre, pezzi di

(1) I matematici indiani chiamavano *erosione* il segmento somma delle due frecce corrispondente alla corda comune di due circonferenze intersecantisi.

legname, mucchi di grano. Nell' ultima sezione intitolata *Misura col gnomone* l'Autore risolve i due problemi: 1°. Conoscendo l'altezza di un lume collocato sopra una base verticale, quella di un gnomone e la distanza fra questo e la base del lume, calcolare l'ombra proiettata dal gnomone; 2°. conoscendo le ombre proiettate rispettivamente da un gnomone posto in due diverse posizioni, calcolare l'altezza del lume.

Vi si trova altresì la seguente regola per costruire un triangolo rettangolo con numeri razionali: se a è un cateto del triangolo e b un numero qualunque, $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)$ sarà l'altro cateto e $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right)$ l'ipotenusa. Questa regola riposa sull'identità $\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b}+b\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)^2+a^2$, ed è una generalizzazione delle due regole che Proclo nel suo Commento alla 47ª proposizione degli *Elementi* di Euclide attribuisce a Pitagora e a Platone; poichè queste si ricavano da quella ponendo $b=1$ o $b=2$.

169. La Geometria di Bascara, la quale trovasi nei cap. VI-XI della sua opera *Lilavati*, non è che una imperfetta imitazione dell'opera di Bramagupta; ma le proposizioni più importanti dell'opera di questi, che si riferiscono al quadrilatero inscrittibile in un cerchio, o sono omesse o non sono enunciate esattamente; il che mostra che Bascara non le avea comprese. Devesi perciò concludere che dopo Bramagupta la matematica andava declinando e l'opera di questo geometra non era più compresa.

Lo Chasles divide il lavoro geometrico di Bascara in 5 parti: le prime tre si occupano del triangolo in generale, del triangolo rettangolo e del quadrilatero; nella 4ª si considerano alcune proposizioni relative al cerchio e nella 5ª si studiano i volumi, oltre un capitolo sull'uso del gnomone.

In riguardo al teorema pitagorico vi si trovano due dimostrazioni, l'una qui riportata al n. 52; l'altra tutt'affatto indiana è la seguente: si costruisca il quadrato sull' ipotenusa e si riporti 4 volte il triangolo dato, come nella figura 38; il quadrato che rimane nel mezzo è quello della differenza dei due cateti. Bascara semplicemente disegna la figura ed aggiunge senz' altro: *Ecco*! Egli non crede necessario di osservare che se a e b sono i cateti e c l'ipotenusa, dalla figura si ricava

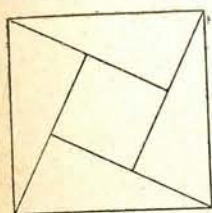



Fig. 38.

$$c^2 = 4.\frac{ab}{2} + (a - b)^2 = a^2 + b^2.$$

Riportiamo i due seguenti esempî, che vi si trovano, degni di nota per la forma degli enunciati: 1° Il vento ha spezzato una canna di bambù in modo che la sua estremità ha toccato il suolo alla distanza di 16 piedi dalla base del tronco. Dimmi, matematico, a quale altezza dal suolo la canna è stata spezzata? 2. Un fiore di loto, che emerge dalle acque di un lago per $^1/_2$ piede, spinto dal vento s'inchina e sparisce nell'acqua alla distanza di 2 piedi dal punto ove emergeva. Calcola subito, matematico, la profondità del lago. Segue poi una regola per risolvere il seguente problema: Conoscendo le lunghezze m ed n di due bastoni di bambù posti verticalmente sul suolo ad una certa distanza, calcolare la lunghezza della perpendicolare al suolo condotta dal punto d' intersezione delle congiungenti l'estremo dell' uno col piede dell'altro, ed i segmenti che il piede di detta perpendicolare determina sulla congiungente i piedi dei due bastoni. Se h (Fig. 39) indica la lunghezza della perpendicolare, d la distanza dei piedi dei

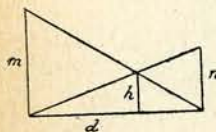



Fig. 39.

due bastoni, ed x e y i segmenti sopra d, la regola dell'autore indiano è enunciata nelle formule

$$h = \frac{mn}{m+n}, x = \frac{dm}{m+n}, y = \frac{dn}{m+n}.$$

In riguardo al quadrilatero vi è riportata la regola di Bramagupta per l'area di un quadrilatero inscrittibile, ma Bascara soggiunge che così si ha l' area *inesatta* del quadrilatero, argomentandosi da ciò che egli non l'ha capito.

Gl'Indiani calcolarono anche i lati dei poligoni regolari inscritti di 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 lati, e nel *Lilavati* si trova che in un cerchio di diametro eguale a 2000, i lati dei detti poligoni sono ordinatamente $1732\frac{1}{20}$,

$1414\frac{13}{70}$, $1175\frac{17}{30}$, 1000, $867\frac{7}{12}$, $765\frac{11}{30}$, $683\frac{17}{20}$.

170. La formula che ci dà l' area del triangolo in funzione dei lati, trovata nelle opere di Bramagupta e di Bascara, ha dato luogo a non piccola discussione fra gli storici della matematica, poichè in essa si è voluto trovare una prova decisiva che la Geometria presso i Bramini sia tutta derivata dalla Geometria greca e specialmente dagli scritti di Erone. E a maggior conferma si è osservato che tanto Erone, quanto i due geometri indiani si sono serviti per gli esempi delle loro regole dei triangoli rettangoli di lati 3, 4, 5 e 5, 12, 13, e del triangolo obliquangolo di lati 13, 14, 15. Però è sorprendente il trovare in Bramagupta questa formula come caso speciale dell' altra che ci dà l' area di un quadrilatero iscrittibile in funzione dei lati. Quest' ultima non si trova in alcuno scrittore greco e certamente addimostra in colui che per primo l'ha ricavata una grande abilità ed una profonda conoscenza della teoria del quadrilatero; infatti nel *Brahma-siddhanta* essa sta insieme a non pochi altri teoremi sul quadrilatero,

tra' quali quello di Tolomeo, che il rettangolo, cioè, delle diagonali eguaglia la somma dei rettangoli dei lati opposti. In Europa questa formula apparve la prima volta nel 1620 dimostrata dal matematico olandese Snellius, il quale nel suo *Commento* alla prima proposizione del libro *De problematibus miscellaneis* di Ludolfo von Ceilan dice che prima di lui l'area di un quadrilatero inscrittibile calcolavasi decomponendosi la figura in due triangoli, e poi soggiunge: *Quanto operosior est haec vulgata ad istigandam auream viam, tanto gratius novum hoc nostrum theorematum benevolo lectori futurum speramus.*

171. Importantissima è la Trigonometria indiana, la quale differisce sostanzialmente da quella greca. Gl'Indiani, come i Babilonesi e come i Greci, dividevano la circonferenza in $4 \times 90 \times 60 = 21600$ parti eguali o minuti; ma diversamente dei Greci che dividevano il raggio in 60 parti eguali e che giammai avrebbero preso un arco per misura di un segmento rettilineo, essi dalla relazione $2\pi r = 21600$, che esprime la lunghezza della circonferenza, ponendo $\pi = 3{,}1416$, trovarono il raggio con molta approssimazione eguale a 3438 minuti (1).

Dividevano poi un quadrante in 24 parti eguali, e quindi ciascuna parte era di 225 minuti ovvero 3°45'; ed inoltre, facendo fare un gran progresso alla goniometria, non seguendo l'esempio dei Greci che consideravano la corda dell'arco doppio, calcolavano sempre mediante il seno ed il seno-verso. L'origine di tale procedimento devesi ricercare nell'Astronomia, poichè gl'Indiani dividevano la circonferenza, rappresentante l'orbita apparente del Sole, in 12 parti o segni, ciascuno di 30°, e ogni segno in 8 parti, quindi l'intera circonferenza

(1) Il valore del raggio sarebbe in tal caso eguale a 3437,7 minuti, valore molto prossimo a quello assunto dagl'Indiani.

veniva divisa in 96 parti eguali, ciascuna di 225 minuti. Considerando (Fig. 40) i due archi *AM*, *AN*, ciascuno di 30^0 o di un segno, la corda (2) *MN* corrisponderà all' arco di 60^0 o di 2 segni; epperò si è assunta la semicorda *MP* come corrispondente ad un segno, cioè all'arco *AM*. E gl'Indiani calcolarono per tutti gli archi di un quadrante di $3^0 45'$ in $3^0 45'$ i rispettivi seni, ed, oltrepassando i Greci, introdussero ancora altre due funzioni, cioè il senoverso ed il coseno. Molto semplice era poi la costruzione della detta tavola: il seno di 90° era eguale al raggio, ossia a 3438; il seno di 30^0 era evidentemente la metà del raggio, ossia 1719; applicando la relazione a loro nota pel teorema di Pitagora $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = r^2$, ottenevano

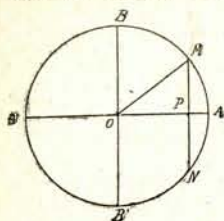



Fig. 40.

$\text{sen}45^0 = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = 2431$; sostituendo a $\cos\alpha$ il suo eguale $\text{sen}(90^0 - \alpha)$ e facendo $\alpha = 60^0$, essi deducevano sen 60^0 $= \sqrt{\frac{3r^2}{2}} = 2978$. Coi seni di 90^0, 60°, 45^0 e 30^0 come fondamentali calcolavano successivamente i seni della metà degli archi mediante la formula sen ver $2\alpha = 2\text{sen}^2\alpha$, ed ottenevano da sen$45^\circ$ i seni di $22^\circ 30'$, e $11^\circ 15'$, e da sen 30° i seni di 15°, $7^\circ 30'$, $3^\circ 45'$. Mediante questi calcolavano poi i seni dei loro complementi, ossia di $67^\circ 30'$, $78^\circ 45'$, 75°, $82^\circ 30'$, $86^\circ 15'$; quindi i seni delle metà di questi archi; poi quelli dei loro complementi; indi ancora quelli delle metà di questi; e così di seguito.

In tal modo gl'Indiani ottennero una tavola di seni di tutti gli archi del primo quadrante di $3^\circ 45'$ in $3^\circ 45'$, esprimendo ciascun seno mediante l'arco ad essi eguale

(2) Il segmento *MN* fu detto in origine ***corda*** forse dall' arco da frecce, che probabilmente avea l'ampiezza di 60^0.

in lunghezza. Dallo studio di questa tavola dedussero poi l'importante proprietà che se a, b, c indicano tre archi tali che la differenza fra due consecutivi di essi sia $3°45'$, si ha la relazione

$$\text{sen}a - \text{sen}b = (\text{sen}b - \text{sen}c) - \frac{\text{sen}b}{225}.$$

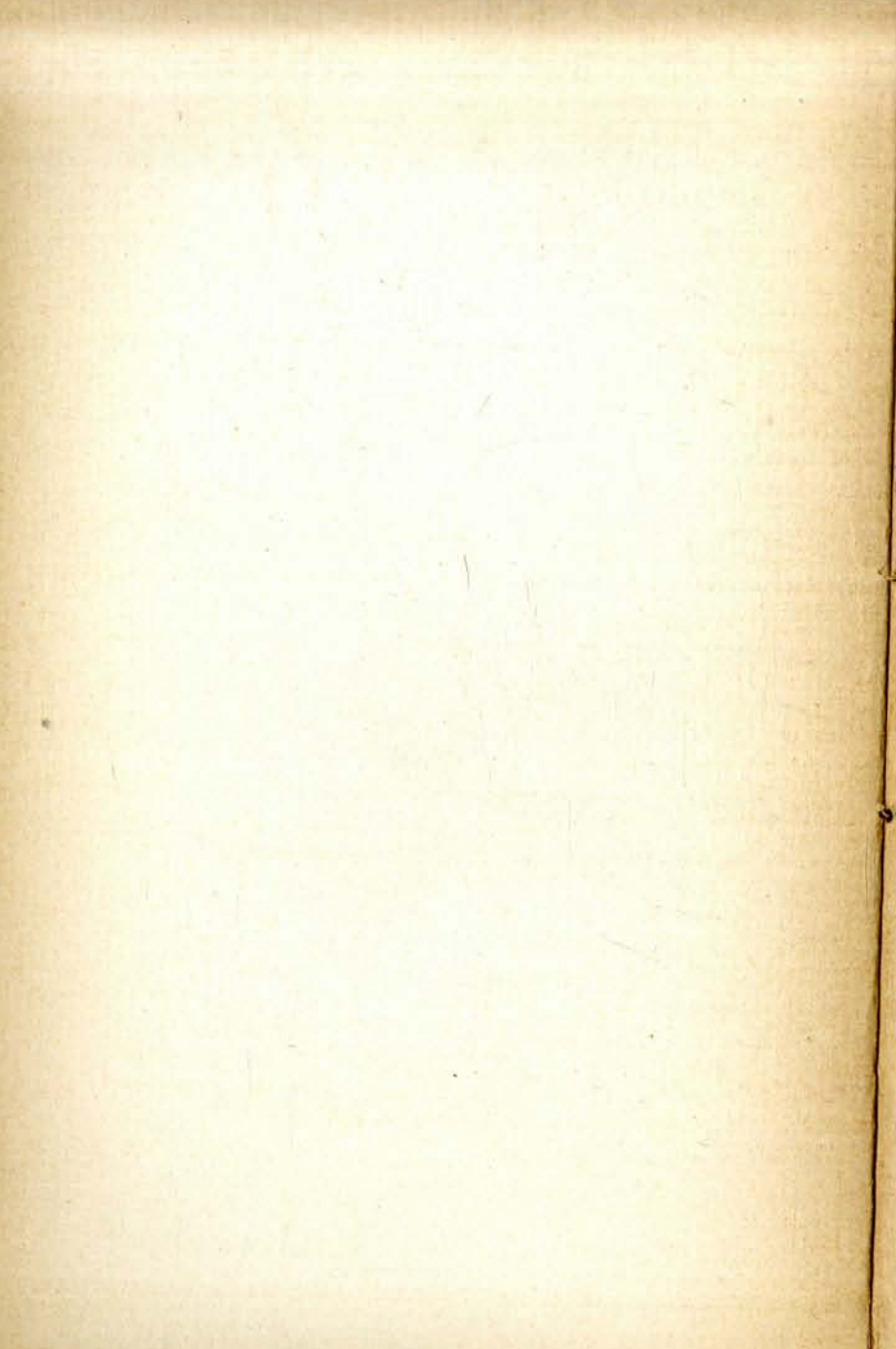
Mediante questa formula d'interpolazione essi potevano ricalcolare sempre che volevano la loro tavola dei seni. Bascara però dà inoltre i seguenti valori più esatti:

$\text{sen}\, 3°45' = \frac{100}{1529}$, $\cos 3°45' = \frac{466}{467}$, i quali differiscono dai

valori veri per un diecimilionesimo del raggio, ed insegna ancora, mediante la relazione $\text{sen}\,(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha\, \text{sen}\beta$, costruire una tavola di seni per gli archi crescenti di grado in grado, ponendo $\text{sen}\, 1° =$

$= \frac{10}{573}$ e $\cos 1° = \frac{6568}{6569}$, i quali valori differiscono dai

corrispondenti valori esatti per un diecimilionesimo del raggio. Nessun trattato trigonometrico indiano sul triangolo è a noi pervenuto; però sappiamo che pei loro calcoli astronomici essi risolvevano i triangoli rettangoli piani e sferici.

172. È degno di nota il progresso che i matematici Indiani fecero nella scienza dei loro tempi: e per la forma e per lo spirito si può asserire che l'aritmetica e l'algebra dei nostri tempi sono essenzialmente indiane più che greche. Devesi però osservare che le più belle scoperte dei Bramini al di là del Gange intorno all'analisi indeterminata giunsero in Europa troppo tardi e non esercitarono quindi alcuna influenza.

CAPITOLO XI.

GLI ARABI.

173. Al principio del VII sec. dell'era volgare appare sulla scena del mondo un popolo, fino allora sconosciuto nella storia, il popolo dei Beduini Arabi di razza semitica, che animato da ardente entusiasmo per la nuova religione bandita da Maometto, con inaudita rapidità in meno di 100 anni sottomette i paesi dall'Indo e l'Oxus fino all'Ebro, la Persia, la Mesopotamia, la Siria, l'Egitto, le contrade littorali dell'Africa settentrionale e la Spagna. Ed è sorprendente come questo popolo, vissuto fino a quel tempo nello stato nomade, seppe dominare sopra popoli civili, appropriandosene rapidamente la civiltà e costringendoli ad accettare la sua lingua e la sua religione. Da Damasco, ove i primi califfi avevano stabilita la loro residenza, gli Abbassidi, impossessatisi nel 750 del Califfato, passarono nella nuova città di Bagdad che, sorgendo sulle rive dell'Eufrate, là ove anticamente giaceva la grande città di Babilonia, era il vero centro di un gran regno asiatico e poteva congiungere la civiltà ellenica colla civiltà indiana. E da quella città gli Abbassidi incominciarono le loro conquiste pacifiche nel campo delle scienze e delle arti: il califfo Al Mansur (754-775) rivolse il suo favore alle scienze, Harun al Rasid (786-809) ne seguì l'esempio; ma sopra tutti si distinse Al Mamun (813-833) per la parte che prese nella diffusione delle scienze e per la generosa protezione accordata agli scienziati. Ed alla corte degli Abbassidi si raccolsero scienziati greci ed indiani, e gli Arabi divennero i custodi della

scienza, la coltivarono durante il periodo di oscurantismo nell' Occidente e la consegnarono poi all' Europa: e così la scienza passò dalla razza ariana alla semitica per ritornare poi all'ariana. Gli Arabi però aggiunsero ben poco a quello che ricevettero; qua e là coltivarono più estesamente un piccolo ramo della scienza, nel quale era stato già additato il cammino. Inoltre diedero poca importanza ad un altro ramo nel quale i due popoli predecessori aveano mostrato la loro genialità, cioè nella teoria delle sezioni coniche e delle curve presso i Greci e nella teoria dei numeri ed all' analisi indeterminata presso gl'Indiani; poichè inclinando essi meno alla speculazione pura che all' acquisto di reali cognizioni che potevano loro essere utili per la costruzione delle tavole astronomiche e per altri scopi pratici, coltivarono particolarmente l'Aritmetica, l'Algebra elementare e la Trigonometria.

174. Nel 772 andò a Bagdad alla corte del Califfo Al Mansur un astronomo indiano, portandovi le tavole astronomiche dei Bramini, le quali, prese forse dal *Brahma-sphuta-siddhanta* di Bramagupta, furono ben presto per ordine del sovrano tradotte in Arabo, e vi godettero grande autorità sotto il nome di *Sinhind:* esse contenevano l'importante tavola indiana dei seni. Senza dubbio verso lo stesso tempo e forse mediante le dette tavole astronomiche, gli Arabi vennero a conoscenza dei segni numerali indiani con lo zero ed il relativo principio del valore di posizione. Prima di Maometto gli Arabi non aveano segni numerali ed i numeri erano scritti mediante i loro nomi per intero; più tardi per la vasta amministrazione finanziaria sopra i popoli loro soggetti, ebbero bisogno di un simbolismo numerico, ed in alcune contrade adottarono i segni numerali dei popoli conquistati più di essi avanzati nella civiltà; e così nella Siria fecero uso della notazione greca ed in Egitto della coptica. In alcuni casi abbreviarono gli aggettivi

numerali, e si suppone che tali abbreviazioni dessero origine ai numerali *divani*, trovati in un dizionario arabico-persiano. Però gradatamente vennero in uso per rappresentare i numerali le 28 lettere dell'alfabeto arabo analogamente all'uso greco; ma questa notazione fu a sua volta abbandonata per usare la notazione indiana, che ben presto fu adottata dai mercanti ed anche dagli scrittori di aritmetica, che ne riconobbero la sua superiorità. Solo nell'astronomia continuò ad aver vigore la notazione alfabetica, non presentando essa grande svantaggio, poichè nel sistema sessagesimale, preso dall'*Almagesto* di Tolomeo, era necessario di scrivere numeri solamente di una o di due cifre.

175. In riguardo alla forma delle così dette cifre arabe è di somma importanza un passo di *Albiruni* (morto nel 1038), scrittore arabo, che visse molti anni nell' India. Egli ci insegna che la forma dei numerali, come anche delle lettere, in India era differente nelle diverse località, e che gli Arabi scelsero fra le varie forme dei numerali quella più a loro conveniente.

Troviamo però una grande differenza fra i simboli usati dagli Arabi in Oriente e quelli usati dagli Arabi in Occidente, i quali tutti poi differiscono dai moderni numerali *devanagari* (*numerali divini*) usati dagl' Indiani, mentre hanno una sensibile rassomiglianza con gli apici di Boezio. È ben difficile spiegare come tutto ciò possa essere avvenuto, e molte ipotesi sono state fatte dai dotti; ma la spiegazione più accettata fu quella data dal Woepcke, della quale abbiamo fatto cenno innanzi parlando degli apici dello scrittore romano. Il Woepcke ha sostenuto quanto segue:

1° Gl'Indiani possedevano nove segni per indicare i primi nove numeri fin dal secondo secolo d. C., ma non ancora lo zero; ed è noto che in quel tempo eranvi scambi commerciali fra l'India e Roma per la via d'Alessandria. Con gli scambi commerciali intervennero anche scambi

di conoscenze: gl' Indiani conobbero qualche cosa del pensiero greco, e gli Alessandrini le idee sulla filosofia e la scienza dei popoli dell'estremo Oriente. In tal guisa i nove numerali degli Indiani, senza lo zero, vennero ad Alessandria, ove avranno potuto attrarre l'attenzione dei Neo-pitagorici. Da Alessandria furono fatti noti in Roma, nella Spagna e nell'Africa occidentale.

2°. Verso l'ottavo secolo a Bagdad gli Arabi ebbero conoscenza della notazione numerale indiana, quando non solo questa era stata modificata nella forma delle cifre, ma anche perfezionata con l'aggiunta del principio di posizione e con l'introduzione dello zero. Gli Arabi d'Occidente, comprendendo l'utilità del nuovo principio, accettarono il segno dello zero sotto forma di cerchietto, ma conservarono la forma degli antichi segni numerali indiani, che essi già possedeano, se non per altra ragione per far cosa diversa degli Arabi d'Oriente, loro nemici politici; ed in ricordo dell' origine indiana li chiamarono *numeri Gubar* (*numeri polveri*), poichè i Bramini usavano di eseguire i loro calcoli su tavolette coperte di sabbia.

3°. I numerali indiani anche dopo l'ottavo secolo subirono ulteriori cambiamenti fino a modificarsi nei moderni segni detti *devanagari* (1). Nella tavola della figura 41 segniamo in corrispondenza alle moderne cifre numeriche le corrispondenti lettere sanscrite del II secolo d. C., che si possono confrontare con gli Apici di Boezio innanzi riportati, i segni numerali *gubar* degli Arabi occiden-

---

(1) La controversia riguardante l'origine e la trasmissione delle nostre cifre numeriche è un ottimo esempio per illustrare come una questione matematico-storica possa offrire un grande stimolo allo studio della storia della civiltà e portarvi non piccola luce, poichè lo studio della sopradetta questione condusse a considerare e confrontare le condizioni intellettuali, commerciali e politiche degl'Indiani, dei Greci di Alessandria, dei Romani e specialmente degli Arabi d'Oriente e di Occidente.

tali, i segni numerali degli Arabi orientali ed i moderni segni *devanagari.*

lettere sanscrite del II sec d. C. — 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

numerali Gubar

numerali degli Arabi d'Oriente

numeri *devanagari*

Fig. 41.

176. Oltre quanto abbiamo innanzi detto, cioè che nel 772 fu portato a Bagdad il *Siddhanta* indiano e tradotto in arabo ed i viaggi dell'arabo Albiruni nell'India, null'altro sappiamo di certo intorno alle relazioni scientifiche fra gli astronomi arabi ed indiani, quantunque non si possa negare che più estese comunicazioni abbiano dovuto aver luogo fra gli scenziati dei due paesi. In quanto poi alla via che la scienza greca tenne per passare agli Arabi siamo molto meglio edotti.

Sappiamo infatti che nella Siria le scienze, e specialmente la filosofia e la medicina, erano coltivate da greci cristiani; e celebri erano le scuole di Antiochia e di Emesa ed ancor più celebre la fiorente scuola nestoriana di Edessa; e dalla Siria erano chiamati a Bagdad medici e dotti greci e s'iniziava la traduzione in arabo di opere di scienziati ellenici. Un gran numero di manoscritti greci furono mandati per prima condizione di un trattato di pace dall' imperatore di Costantinopoli Michele III al Califfo Al Mamum e per ordine di questo tradotti in arabo: i successori di questo Califfo continuarono l'opera, incoraggiando sempre più le traduzioni dal greco; e così al principio del decimo secolo le più importanti opere dei filosofi, medici, matematici e astronomi greci potettero esser lette nella lingua araba. Da principio le traduzioni delle opere di matematica

dovettero essere molto deficienti, poichè era ben difficile trovare chi alla conoscenza profonda delle due lingue, la greca e l'araba, unisse la conoscenza necessaria in matematica; epperò le dette traduzioni furono più volte rifatte prima che fossero soddisfacenti. Le prime opere di matematica greca tradotte, furono gli *Elementi* di Euclide e l'*Almagesto* di Tolomeo, e ciò avvenne durante il regno del famoso Harun al Rasid. Al Mamun ordinò una revisione alla prima traduzione degli *Elementi,* e poichè questa seconda traduzione conteneva ancora moltissimi errori, una nuova ne fu fatta dal dotto Honein ben Ishak o da suo figlio Ishak ben Honein, aggiungendo ai 13 libri il 14° e il 15°; ma il merito di aver dato agli Arabi una buona traduzione degli *Elementi* spetta a Tabit ben Kurrah. Più grandi difficoltà dovettero gli Arabi superare prima che potessero possedere una buona traduzione dell'*Almagesto.* Fra le altre importanti traduzioni in arabo citiamo le opere di Apollonio, di Archimede, di Erone e di Diofanto. Così nello spazio di un solo secolo gli Arabi s'impossessarono dei vasti tesori della scienza ellenica; ma essendo essi poco accostumati all'astrazione, nessuna meraviglia ci deve arrecare l'apprendere che durante il nono secolo tutta la loro energia fu spesa nell'appropriarsi i frutti del genio greco: nel secolo successivo si hanno opere originali di matematici arabi.

177. In astronomia però anche prima del nono secolo si manifestò la grande attività degli Arabi in ricerche originali, e ciò perchè le pratiche religiose dei Maomettani richiedevano la soluzione di parecchi problemi astronomici. Gli astronomi dovevano determinare con precisione nei paesi sparsi del vasto dominio saraceno da qual banda il credente dovesse rivolgersi nel pregare, affinchè i suoi sguardi fossero nella direzione della Mecca; le preghiere e le abluzioni dovevano essere fatte in determinate ore del giorno e della

notte, e ciò richiedeva un' accurata determinazione del tempo; per fissare la data esatta delle feste maomettane era necessario di osservare più accuratamente i moti della luna. A tutte queste necessità si aggiunge che era di grandissimo interesse la predizione delle ecclissi, poichè una vecchia superstizione orientale faceva credere che i grandi fenomeni celesti avessero una misteriosa influenza e sugl' individui e sui popoli. Per tutte queste ragioni gli studi astronomici erano in gran voga; le tavole e gl'istrumenti astronomici perfezionati; eretti osservatori ed istituita una continuata serie di osservazioni. Questo amore intenso per l' astronomia e per l'astrologia continuò durante tutto il periodo scientifico arabo; e come nell'India, anche presso gli Arabi difficilmente si incontra un matematico puro: i matematici arabi erano principalmente astronomi.

178. Il primo autore, degno di nota, di libri matematici presso gli arabi è MOHAMMED BEN MUSA AL HOVAREZMI, cioè nativo della provincia di Chwarizm, il quale visse durante il regno del Califfo Al Mamun; ed a lui per lo appunto il Califfo ordinò di fare estratti dal *Sindhind*, di rivedere le tavole di Tolomeo, di fare osservazioni astronomiche a Bagdad ed a Damasco e di misurare un grado del meridiano terrestre. Di somma importanza è per noi la sua opera sull'Algebra e l'Aritmetica; la parte che riguarda l'Aritmetica non ci è pervenuta nel suo originale e solo nel 1857 il principe B. Boncompagni, benemerito degli studi intorno la storia della matematica, ne trovò una traduzione latina del medioevo dal titolo *Algoritmi de numero Indorum* che incomincia: *dixit Algoritmi.* Quivi la parola *Algoritmi,* ovvero, come più frequentemente è scritta, *algorismi*, è la trascrizione sufficientemente esatta del soprannome arabo *Al Hovarezmi* del detto autore. Tuttavia più tardi si ritenne questa forma per un genitivo latino e *liber Algorismi* fu adoperato nel medio evo come titolo di

libri di Aritmetica (*Algorismus*); ed essendosi poi perduta la tradizione sull'origine di questa parola, fu creduta di origine greca e trasformata in *Algoritmus*, ch'è al presente in uso presso tutte le lingue europee per denotare un regolare schema aritmetico. Singolare trasformazione per la quale il nome di una provincia persiana ottenne questo significato. L'Aritmetica di Mohammed, basata sul principio del valore di posizione e sul metodo di calcolo indiano, « sorpassa, dice uno scrittore arabo, tutte le altre per la brevità e facilità del metodo e mostra l'ingegno e l'acume degl'Indiani nelle più nobili scoperte ». Questo libro è stata la fonte, forse ingrossata in principio per influenza diretta dall'India, di una serie di scritti sul *hisab al hindi* (calcolo indiano).

179. I trattati posteriori di Aritmetica si distinguono dagli anteriori solo perchè presentano una maggiore varietà di metodi, ed inoltre, essendo forse destinati quali libri di scuola, tralasciano di esporre le operazioni dell'estrazione delle radici quadrata e cubica, che sono solamente per matematici ed astronomi propriamente detti, come anche il calcolo delle frazioni sessagesimali, operazioni tutte che in più antichi scritti sono diffusamente esposte. Insegnano le prime quattro operazioni con numeri interi, indi il dimezzamento e la duplicazione secondo vari metodi; spesso vi si trova la prova del 9, detta « prova indiana ». Segue poi la dottrina delle 4 operazioni con le frazioni scritte secondo il metodo indiano, cioè senza linea di separazione, ponendo il numeratore al di sopra del denominatore.

I sopradetti trattati contengono ancora la *regula falsa* e la *regula duorum falsorum*, e mediante questa si risolvevano problemi senza far uso dell'Algebra. Queste regole, di origine indiana, furono introdotte presso gli Arabi da Mohammed ben Musa al Hovarezmi. Della prima abbiamo accennato innanzi; la seconda consiste nella seguente regola: Avendosi da risolvere l'equazione

$f(x) = V$ rispetto ad x, si prendano primieramente per x due valori arbitrari, $x = a$, $x = b$, e si calcolino $f(a) = A$, $f(b) = B$; si determinino gli errori $V - A = E_a$, $V - B = V_b$; si avrà il valore richiesto ponendo $x = \frac{b.E_a - a.E_b}{E_a - E_b}$, valore in generale approssimato, ma esatto solo se $f(x)$ rappresenta una funzione lineare di x.

180. Accenniamo all'altra parte dell' opera di Mohammed, con la quale s'inizia l'Algebra presso gli Arabi. Le due espressioni *Algebr w'al mukabala* con le quali Mohammed denomina questa sua opera, si riferiscono alle due più semplici e principali operazioni che si debbono fare sui termini di un'equazione, affinchè contenga tanto nel 1° che nel 2° membro termini positivi, poichè, nel senso degli Arabi, ed anche dei primi algebristi Italiani, un'equazione con un membro nullo, forma usata la prima volta dal matematico inglese Tommaso Harriot (1560-1621), non avea significato. *Al gebr*, da *jabara*, significa *accommodare un membro rotto* (1), e quindi al dir di Fra Luca, *ristorare li extremi* (i membri dell'equazione) *dei diminuti*, ossia trasportare un termine negativo da un membro dell' equazione nell' altro per avere in entrambi i membri termini positivi; *al mukabala* deriva poi dalla parola araba *mokabolad* e significa *opposizione, comparazione* e quindi *levare da li extremi i superflui* (Fra Luca), cioè ridurre i termini simili in entrambi i membri dell'equazione per semplificarla quanto più è possibile. Così p. es. dall' equazione $x^2 + 3x - 3 = 5x$ risulta per *al gebr* $x^2 + 3x = 5x + 3$ e per *al mukabala* $x^2 = 2x + 3$. E dalla prima di queste due parole deriva l'odierna voce di *algebra*, mentre molti er-

(1) Questo significato conservavasi ancora nel medio-evo, chiamandosi allora *algebra* l'arte di accomodare le fratture, e si conserva tuttora nelle lingue portoghese e spagnola, nelle quali il chirurgo chiamasi *algebrista*.

roneamente avevano creduto che l'Algebra dovesse il suo nome a Geber, astronomo arabo di Siviglia, attribuendone a lui l'invenzione, senza badare che quest'astronomo visse circa 200 anni dopo Mohammed.

181. Ecco in poche parole il contenuto di quest'opera.

Essa insegna l'addizione, la sottrazione e la moltiplicazione di espressioni contenenti la quantità incognita o il suo quadrato o anche la sua radice quadrata (1); dà la regola: « Se i due fattori sono negativi, il prodotto è positivo, ecc. »; le regole relative all'ad-

---

(1) L'incognita è detta *shai* (*res*, *cosa*) ovvero *gidr* (*radice*), la quale ultima parola deriva da *gadr* (radice di una pianta), ed indica anche la *radice quadrata*. Da qui il nome di *regola o arte della cosa* dato all'Algebra da Fra Luca (*distinzione* VIII, *praef.*), a ricordo del nome *res* assegnato alla quantità incognita da Leonardo, che per primo trasportò in Italia la scienza degli Arabi; e quando lo studio della nuova dottrina valicò le Alpi, a dimostrare che dall'Italia vi si era trasportata, l'Algebra fu chiamata *ars cossica*, conservando il nome di *numerus cossicus* alla radice dell'equazione, ovvero *ars rei* od ancora presso i tedeschi Rudolfs e Stifel *die coss* e presso l'inglese Recorde *the rule of Cos.* Intorno poi all'origine del simbolo x per denotare l'incognita, il celebre orientalista L. De Lagarde (*Woher stammt das x der Mathematiker?*, Göttingische gelehrt Nachrichten 1882, p. 409-413) dice che esso derivi dalla prima lettera *s* con la quale gli Arabi della Spagna usavano di abbreviare la parola *shai*, lettera che presso i popoli occidentali della rinascenza fu sostituita dalla x. Devesi però osservare che nessun matematico prima di Descartes (Geometria, 1637) si è servito della lettera x a rappresentare l'incognita, e lo stesso Descartes usa anche sovente la z. Prima di Descartes si usavano diversi simboli, *Co*, *p*, *R*, *l*, ecc. per l'incognita, ma il segno più usato era una specie di *r*, iniziale della parola *res*. Vieta ed anche Harriot usavano invece le vocali. Newton nella sua *Arithmetica Universalis* (1707) espressamente dice: « S'impiegano le prime (lettere), a, b, c, d, ecc. per le (quantità) note e le ultime x, y, z, ecc. per le incognite ».

Gli Arabi inoltre chiamavano il quadrato dell'incognita, e spesso anche l'incognita, con la voce *mal* (censo, possedimento), e perciò nei primi scritti di algebra presso i Latini si trova il quadrato indicato con la parola *census*.

dizione e sottrazione vengono dimostrate mediante esempi, rappresentando le singole quantità con segmenti rettilinei. Segue la risoluzione delle equazioni quadratiche, scritte sempre con termini positivi, il che richiede la distinzione di tre diversi casi, rappresentati da $x^2 + px = q$, $x^2 + q = px$, $x^2 = px + q$. L'autore considera sole le radici positive; ma per altro riporta le due radici positive dell'equazione $x^2 + q = px$. Ecco il modo come l'Autore risolve l'equazione del primo caso: se p. es. è dato $x^2 + 10x = 39$, costruisce (Fig. 42) il quadrato $ABCD = x^2$, indi i due rettangoli $BCFE$, $CDGH$, ciascuno eguale a $\frac{10}{2} x$; sarà perciò il quadrato $CFKH = 25$. Da ciò risulta che sarà il quadrato $AEKG = x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$, epperò $x + 5 = 8$, da cui $x = 3$. In modo analogo risolve gli altri due casi.

Fig. 42.

182. Sorge qui la questione: da chi Mohammed prese le sue conoscenze intorno all'algebra? Non è possibile che esse siano interamente di origine indiana, poichè negli autori indiani non si riscontrano le due regole di *al gebr* e di *al mukabala,* e per essi non era necessario di rendere positivi tutti i termini dell'equazione. Diofanto dà due regole che in certo modo rassomigliano a quelle date dall'autore arabo, ma non puossi neppure dire che questi abbia attinto tutte le sue conoscenze dall'autore greco, poichè Mohammed riconosce le due radici dell'equazione $x^2 + q = px$, mentre Diofanto ne nota una sola, ed inoltre l'algebrista greco, al contrario dell'arabo, rigetta le soluzioni irrazionali. Devesi quindi concludere che l'Algebra di Mohammed non era nè puramente indiana nè puramente greca, ma proveniva da entrambe le sorgenti.

183. Il più antico frammento di geometria presso gli Arabi è contenuto nell'Algebra del detto autore. Vi si

trova il teorema di Pitagora, dagli Arabi chiamato *la figura della sposa*, dimostrato però al modo indiano e solamente per il caso più semplice, quando cioè il triangolo è isoscele; sono calcolate le aree del triangolo, del parallelogrammo e del cerchio, facendo uso per π del valore $3\frac{1}{7}$ e dei due valori indiani $\sqrt{10}$ e $\frac{62832}{20000}$. Strano a dirsi, l'ultimo valore è stato poi dagli Arabi dimenticato e sostituito da altri meno approssimati. Il libro contiene ancora alcune regole per calcolare il volume dei corpi, quasi di tutti quelli considerati nell'opera di Bramagupta, fatta eccezione della sfera e del cilindro. Questo primo frammento geometrico senza dubbio deriva dall' India, mentre i successivi scrittori Arabi derivarono la loro geometria interamente dalla Grecia.

184. Dobbiamo ora menzionare i tre figli di Musa-ben-Sakir, il quale da ladrone divenne il favorito di Al Mamum. Morendo egli lasciò i suoi figli, MOHAMMED, AHMED ed HUSAN, tutti e tre ancora in età minore, al Califfo, il quale li fece educare, prendendone cura paterna. Essi scrissero molte opere fra le quali citiamo una Geometria di cui ci è pervenuta una traduzione latina mediovale dal titolo *Verba filiorum Moysi, filii Schaker, Mahumeti, Hameti, Hasen.* In quest' opera trovasi dimostrata la formula dell'area del triangolo in funzione dei tre lati, facendone applicazione al triangolo di lati 13, 14 e 15 come presso gl'Indiani. La dimostrazione è quella che Fibonacci e Nemorario han dato nel XIII secolo, riportata anche da Fra Luca e Tartaglia. Essendo diversa da quella di Erone, parrebbe appartenere agli Arabi. Uno di essi viaggiò nella Grecia per raccogliere manoscritti astronomici e matematici; alcuni tradusse, altri fece tradurre: al ritorno avendo stretta amicizia con Tabit ben Kurrah, e avendo riconosciuto in questi un dotto ed esperto astronomo, gli procurò un posto alla corte in Bagdad.

185. Intorno a questo tempo fioriva altresì l'astronomo e matematico ABU ABDALLAH MOHAMMED BEN ISA AL MAHANI (cioè da Mahan nel Khorasan), il quale fece le sue osservazioni a Bagdad dall'854 all'866. Egli pel primo fra gli Arabi ebbe l'idea di risolvere algebricamente il celebre problema della divisione della sfera di Archimede, problema che dipende dall'altro di dividere un dato segmento rettilineo AB in X in modo che si abbia $AB.AX^2 = V$, ove V rappresenta il dato volume; ma essendo stato condotto ad un'equazione di 3° grado, non potette risolverla. Si dichiarò quindi che questa risoluzione era impossibile, finchè apparve Abu Gafar al Hazin, che sciolse l'equazione per mezzo delle sezioni coniche. Devesi in ogni modo ascrivere a merito di Al Mahani di aver trasformato un problema geometrico in un problema algebrico. Egli scrisse altresì un commento all'opera *De sphaera et cylindro* di Archimede.

186. TABIT BEN KURRAH (833-902) nacque ad Harran nella Mesopotamia, ed è celebre non solo come astronomo e matematico ma anche come profondo conoscitore delle lingue greca, araba e siriaca; le sue traduzioni delle opere di Apollonio, di Archimede, di Euclide, di Tolomeo, di Teodosio sono fra le migliori che vanti la letteratura araba; ed il nome che porta oggidì la μεγάλη σύνταξις di Tolomeo è a lui dovuto, avendo egli trascritto la voce greca μεγίστη in *Almagisti*. A lui si deve l'unico progresso notevole che fecero gli Arabi nella teoria dei numeri, come l'avevano potuto apprendere dai libri aritmetici degli *Elementi* di Euclide e dall' opera di Nicomaco. Ciò si riferisce alla formazione dei numeri amicabili, il concetto dei quali fu già adoperato, come dice Tabit, a loro modo dai Pitagorici (1). In questo scritto Tabit si distingue per il rigoroso metodo euclideo col

(1) La regola di Tabit è stata riferita nella nota a pag. 49.

quale egli dimostra il suo teorema; l'andamento del suo criterio coincide in sostanza con quello più tardi introdotto dall'Eulero. Tabit si è pure occupato della trisezione dell'angolo.

187. Il più illustre astronomo del nono secolo è certamente MOHAMMED BEN GOBIR BEN SINAN ABU ABDALLAH, denominato AL BATTANI, dai latini ALBATEGNIUS, perchè nacque a Battan nella Mesopotamia verso l'850: morì a Damasco il 929. Alcuni lo citano come principe o luogotenente, ma sembra che ciò sia dovuto ad un equivoco. Fece osservazioni in Rahka dall'878 al 918 ed « è indubitato, così dice un dotto arabo, che niuno di quelli vissuti sotto l'Islam è a lui pari nell'esatta osservazione delle stelle o nella ricerca dei moti ». Sono celebri le sue tavole del Sole e della Luna, nelle quali egli non solo non accetta la così detta trepidazione dell' ottava sfera introdotta in astronomia da Tabit ben Kurrah, la quale ha deformato le tavole astronomiche fino al tempo di Tycho Brahe, ma ammette un moto progressivo dei punti equinoziali. La sua opera *De motu* ovvero *De scientia stellarum*, tradotta in latino nel secolo XII da Platone Tiburtino, e che anche Regiomontano trovò meritevole di un accurato esame, dimostra ch'egli fu un valente osservatore profondamente versato nell'astronomia greca, non allontanandosi in alcuna parte essenziale dalla dottrina di Tolomeo (1). Dal punto di vista matematico si devono a lui alcuni importanti progressi, di cui qui faremo cenno.

Il *Liber de scientia stellarum* di Al Battani è il più antico trattato arabo di trigonometria a noi noto, ed ivi

---

(1) Nel 1903 il professore C. A. Nallino pubblicò negli *Atti del R. Osservatorio di Brera di Milano* un'accurata edizione del testo arabo dell'opera di Al Battani con una traduzione latina e con dotte annotazioni sotto il titolo: *Al. Battani sive Albatenii Opus Astronomicum. Ad fidem codicis Escurialensis arabice editum.*

sono già introdotti i seni (1) invece delle corde di Tolomeo, con la esplicita dichiarazione « per risparmiare nel calcolo il ripetuto raddoppiare ». L' altro progresso che segna la trigonometria araba su quella di Tolomeo, è che in essa i teoremi non sono, come presso i Greci, delle proposizioni geometriche, ma hanno il carattere di formole algebriche. Così Al Battani spesso dalla determinata equazione $\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} = D$ ricava il valore di φ per mezzo di $\operatorname{sen}\varphi = \frac{D}{\sqrt{1 + D^2}}$, procedimento questo ignoto agli antichi. Egli non solo poi conobbe tutte le formule pei triangoli sferici che trovansi nell'*Almagesto*, ma ne ag-

---

(1) L'origine di questa denominazione per una funzione di un angolo è la seguente, come è stato dichiarato prima dal Munk e poi dal Woepcke e da tutti gli storici della Matematica. Gli Arabi ricevettero le prime nozioni trigonometriche dagl' Indiani, i quali denominavano *jyardha* (= *mezza corda*) od anche *jiva* (= *corda*) il seno di un arco, e trascrissero la voce indiana nel loro linguaggio *gib*. Questa voce in arabo non aveva però alcun significato, mentre la scrittura corrispondente si poteva leggere anche *gayb*, che significa *piegatura*, *grembo*, *seno*; ed in seguito, avendosi perduto la tradizione dell'origine di questa voce, la scrittura fu letta appunto *gayb* ed il nome strano di *seno* rimase ad indicare la metà della corda dell'arco doppio di un dato arco. (Veggasi Tropfke, *Gesch. der elem.-math.*, Lipsia, 1903, vol. 2°, pagine 212-214).

Alcuni storici della Matematica riferiscono che la parola *sinus* sia apparsa la prima volta in Europa nella traduzione dell'opera di Al Battani fatta da Platone di Tivoli (p. es. Müller, *Zeittafeln zur Gesch. der Math.*, Lipsia 1892, pag. 62; Cantor, *Gesch. der Math.*, volume I, 2a ediz., pag. 693), ma ciò non è esatto, poichè la parola *sinus*, che si riscontra una sola volta nella traduzione di Platone di Tivoli, è dovuta al Regiomantano nel suo commento alla detta traduzione. La parola *sinus* si legge invece la prima volta nella traduzione dell' opera astronomica dell'arabo Geber ibn Aflah fatta da Gherardo di Cremona. Leggasi a tal proposito la nota alle pp. 154-156 della parte prima della traduzione citata nella nota antecedente dell'opera di Al Battani fatta dal prof. Nallino.

giunse una importantissima per i triangoli obliquangoli, cioè $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$, mediante la quale non avea più bisogno di dividere i detti triangoli per la loro risoluzione in triangoli rettangoli (1).

Gl' Indiani aveano già fatto uso del coseno, come abbiamo innanzi riferito, ma in Al Battani trovasi la prima idea, benchè imperfetta, della tangente trigonometrica, idea che era riserbato, come vedremo, ad Abu'l Wafa di sviluppare. Se φ denota un angolo di altezza del Sole, v l'altezza di un gnomone, l la lunghezza orizzontale dell'ombra, dal triangolo rettangolo avente i cateti v, l e l'angolo φ opposto al primo, si ha $l = v \dfrac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$, ed Al Battani calcolò le lunghezze di l corrispondenti a $\varphi = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, \ldots$, costruendo così una tavola delle cotangenti, la quale per altro non poteva servire per l' uso generale, essendo calcolata pel valore numerico di $v = 12$.

188. Al principio del X secolo sorsero in Oriente torbidi politici, e gli Abbasidi perdettero tutte le province dell' impero l' una dopo l' altra. Fortunatamente le nuove famiglie regnanti e specialmente i Bugidi, che nel 946 ebbero il dominio di Bagdad e della Persia, furono quanto i loro predecessori amanti e protettori delle scienze e particolarmente dell'Astronomia; e così le scienze non ebbero a risentire danno dalle agitazioni delle guerre civili, che travagliarono in questo tempo gli Arabi, anzi si può dire che le condizioni divennero per esse più favorevoli. Adul-ed-daula (978-983), uno dei più potenti emiri dei Bugidi, spesso si vantava dei suoi studi astronomici; e i suoi due figli Sarf-ed-daula e Samsa-ed-daula, mentre si combattevano per acquistare

---

(1) Si sa che la formola corrispondente $\cos A = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a - \cos B \cos C$ è dovuta a Vieta, che l'ha data nel 1593 nello scritto *Variorum de rebus mathematicis responsorum, liber octavus.*

il trono, professero anch'essi l'astronomia; anzi uno di essi fondò nel giardino del suo palazzo in Bagdad un nuovo osservatorio astronomico, ove verso il 988 chiamò un intero collegio di dotti per studiare il movimento dei pianeti. I più importanti fra questi sono Al Sagani, Abu Sahl Al Kuhi, ma sopra tutti Abu'l Wafa.

189. Dobbiamo però prima far cenno dell'astronomo Ahmed ben Iusuf, che morì nel 945. Egli scrisse un libro sulle proporzioni, ove il teorema di Menelao è denominato la *figura cata*. Scrisse ancora sugli archi simili ed un commentario sul *Centiloquium* di Tolomeo.

190. Abu'l Wafa Mohammed ben Mohammed nacque il 10 giugno del 940 in Buzsham, piccola città del Chorassan, regione fra le montagne persiane, e morì nel primo di luglio del 998 in Bagdad. Al suo nome si lega la più importante scoperta astronomica che abbiano fatto gli Arabi; nel suo *Almagesto* si parla di una terza ineguaglianza del moto lunare (1), identica alla *variazione* del corso lunare che in Occidente fu la prima volta scoperta da Tycho de Brahe e che raggiunge il suo massimo negli octanti. Egli inoltre è uno degli ultimi traduttori e commentatori delle opere greche, ed a lui gli Arabi debbono la traduzione dell'opera di Diofanto. Il fatto poi ch' egli stimò degna dei suoi commenti l'Algebra di Mohammed ben Musa Hovarezmi addimostra che questa branca della matematica nessuno o piccolo progresso avea fatto fra' suoi concittadini.

Ad Abu'l Wafa si deve ancora un gran progresso della Trigonometria. Non solo egli inventò un metodo per costruire tavole di seni, che dànno il seno di mezzo

---

(1) La prima ineguaglianza del moto lunare, dovuta alla posizione eccentrica dell'orbita lunare, è stata scoperta da Ipparco ed è chiamata *aequatio centri*: Tolomeo aggiunse poi quella perturbazione del corso lunare, che dicesi *evectio* e che principalmente si nota nelle sizigie e nelle quadrature.

grado corretto fino alla nona cifra decimale, ma introdusse la tangente come funzione trigonometrica indipendente. Infatti egli invece dell'*umbra recta*, cioè dell'ombra gettata da un gnomone verticale sopra un piano orizzontale, calcolata da Al Battani mediante la relazione $l = v \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$ per $v = 12$, calcolò l'*umbra versa*, detta anche *prima umbra* o semplicemente *umbra*, cioè la lunghezza dell'ombra $l = v \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}$ che un gnomone orizzontale getta su di un piano verticale, su cui è fissato, per $v = 60$. Ottenne così una tavola delle tangenti, e definì nel seguente modo la sua nuova funzione angolare: « L'*umbra* (*la tangente*) di un arco è il segmento rettilineo tracciato dall'estremità dell'arco parallelamente al seno, nell'intervallo compreso fra questa estremità e la retta che dal centro del cerchio va all'altra estremità del medesimo arco. Così l'ombra è la metà della tangente del doppio dell'arco, compresa fra le due rette condotte dal centro del cerchio all'una ed all'altra estremità dell'arco doppio ». Soggiunge poi: « l'*umbra recta* (*la cotangente*) è l'umbra prima del complemento dell'arco », e chiama *diameter umbrae* la secante, insegnando ancora tutte le relazioni che sussistono fra le sei funzioni goniometriche. Egli poi si valse di questa sua tavola per determinare un angolo mediante la sua *umbra*, poichè trovasi presso di lui per la prima volta calcolata l'ascensione retta α di un punto dell'ecclittica, la cui lunghezza è θ, mediante la formola $\operatorname{tg}\alpha = \cos\varepsilon \operatorname{tg}\theta$, mentre tutti i suoi predecessori, non potendo determinare un angolo per mezzo della sua tangente, calcolavano prima della longitudine la declinazione δ con la formula $\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}\lambda$ e poscia l'ascensione retta mediante la formula $\operatorname{sen}\alpha = \cot\varepsilon \operatorname{tg}\delta$.

Quest'importante progresso di Aba'lWafa ebbe quasi la medesima sorte della scoperta della variazione

lunare, poichè non fu tenuto in conto dagli scrittori posteriori e non ebbe alcuna influenza sullo sviluppo della trigonometria: nel secolo XV il Regiomontano dovè nuovamente inventare la tangente.

Un trattato di Abu'l Wafa sulle *costruzioni geometriche* ci mostra che gli Arabi si studiavano di perfezionare la parte costruttiva dei problemi geometrici; ivi trovasi una costruzione molto intuitiva dei vertici dei poliedri regolari sulla superficie della sfera circoscritta, ed è introdotta per la prima volta la condizione, divenuta poi celebre in Occidente, di eseguire le costruzioni del problema mediante un'unica apertura del compasso (1).

191. Vigan ben Vasm Abu Sahl al Kuhi (cioè da Kuh nella montagna Taberistan) è il secondo astronomo dell'osservatorio dell'emiro di Bagdad. Egli risolvè in modo notevole il problema di trovare un segmento sferico eguale in volume ad un dato segmento e la cui calotta sferica sia eguale a quella di un altro segmento, problema la cui soluzione analitica conduce ad equazione di grado superiore al secondo; ed aggiunse, il che si trova assai di rado presso gli Arabi, un completo diorisma del problema, seguendo con libero intelletto l'esempio di Archimede, le cui opere e quelle di Apollonio egli studiò con amore. Si occupò anche della trisezione dell'angolo.

---

(1) Il Cardano nel suo trattato *De subtilitate* (Basilea, 1553, lib. XV), il Tartaglia nella sua opera *General trattato di numeri e misure* (Venezia, 1560, 5a parte, lib. III) ed il Benedetti nell'opera *Resolutio omnium Euclidis problematum aliorumque ad hoc necessario inventorum, una tantummodo circini data apertura* (Venezia, 1553) si proposero, e riuscirono nell'intento, di costruire tutti i problemi euclidei, cioè di 1° e 2° grado, mediante la riga ed il compasso di apertura costante. Intorno alle costruzioni geometriche di Abul Wafa con un'unica apertura di compasso veggasi l'articolo del Woepcke *Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Aboul Wafa* nel *Journal asiatique* t. V, 1855, pp. 218-256.

192. Il terzo degli astronomi del detto osservatorio era AHMED BEN MOHAMMED AL SAGANI ABU HAMID AL ASTROLABI (cioè il costruttore di Astrolabi), nativo di Sagan nel Khorasan, il quale morì nel 990. Come i matematici antecedenti si occupò anch'egli della trisezione dell'angolo.

193. Dobbiamo inoltre far parola di altri due astronomi e matematici arabi che vissero sullo scorcio del X secolo, ABU NASR MOHAMMED EBN TARCHAN AL-FARABI, morto a Damasco nel 953, che commentò l'*Almagesto* e tradusse le opere di Aristotele; ABU MOHAMMED ALCHODSCHANDI (da Chodschanda nel Khorasan) che scrisse sui triangoli rettangoli razionali e dimostrò l'impossibilità di risolvere l'equazione $x^3 + y^3 = z^3$ in numeri razionali.

194. La fine del X ed il principio dell'XI secolo segnano il periodo più prospero della matematica pura presso gli Arabi, poichè allora essa si liberò dalla servitù dell'Astronomia. In questo periodo si hanno notizie di corrispondenze e di pubbliche sfide scientifiche, delle quali erano argomento la trisezione dell'angolo, la divisione di una sfera in un dato rapporto, la costruzione dell'ettagono e del nonagono ed altre quistioni; e tutti questi problemi nello stesso tempo erano trattati in numerose monografie.

195. In questo periodo, oltre gli ultimi astronomi sopra menzionati, devesi primieramente nominare ABU BEKR MOHAMMED BEN HASAN AL KARHI, chiamato anche ALHASIBI (il maestro di Aritmetica), matematico di Bagdad. Egli dedicò un'opera algebrica al visir Fahr al Mulk (morto nel 1017), alla quale in onore del suo protettore diede il nome di *Al Fahri*. Essa insegna anche di calcolare radici di indice superiore a 2 e di risolvere equazioni della forma $x^{2n} \pm px^n = \pm q$. La soluzione delle equazioni quadratiche è dimostrata geometricamente ed aritmeticamente.

Il *Fahri* è la prima opera araba in cui si trovano i teoremi sulla somma delle serie

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{2n+1}{3}(1 + 2 + 3 + ... + n),$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2.$$

La prima di queste due relazioni si legge in vero nell'opera *De spiralibus* di Archimede, ma gli Arabi non dovettero attingerla a questa fonte, sia perchè in nessuna delle loro opere è menzionata, sia perchè Alkarhi non ha potuto dimostrarla. La seconda relazione è dimostrata nel seguente intuitivo modo che ci fa riconoscere un'origine indiana:

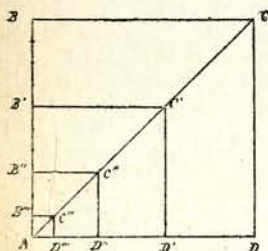



Fig. 43.

Sia il quadrato $ABCD$ (Figura 43) di cui è il lato $AB = 1 + 2 + 3 + ... + n$, e siano $BB' = n$, $B'B'' = n-1$, $B''B''' = = n-2$, ecc. Costruiti i quadrati sui lati AB', AB'', AB'''..., si ha il gnomone $BC'D = BB'$. $BC + DD'$. $D'C' = n(BC + D'C')$; ma $BC = \frac{1}{2}n(n+1)$, $D'C' = \frac{1}{2}n(n-1)$, quindi $BC + D'C' = n^2$, epperò è gnomone $BC'D = n^3$; analogamente si prova che è gnomone $B'C''D' = (n-1)^3$, gnomone $B''C'''D'' = (n-2)^3$, ecc. Adunque il quadrato $ABCD$, che è eguale a $(1 + 2 + ... + n)^2$, sarà decomposto nei gnomoni $n^3 + (n-1)^3 + (n-2)^3 + ...$

Alkarhi si occupò anche dell'analisi indeterminata, e nella sua opera sono riportati la maggior parte dei problemi di Diofanto in una forma talvolta alquanto modificata; e pur trovandovisi i metodi diofantei applicati con ingegno ed intelligenza, tuttavia l'opera del matematico arabo non segna alcun progresso. Di molto

interesse storico è il fatto che nella grande opera di Alkarhi non vi è la minima traccia di cognizione della tanto perfezionata analisi indeterminata degl' Indiani. Reca però ancor più meraviglia il fatto che questo autore nella sua opera di aritmetica *Kafi fil Hisab* non fa alcun cenno dei numerali indiani ed in tutto segue il metodo greco. Anche nell'Aritmetica di Abul Wefa non si trovano i numerali indiani. Non si può supporre che questi autori ignorassero i metodi indiani, i quali si trovavano in quasi tutti gli autori arabi e si deve ammettere, per spiegare questo fatto, l'ipotesi suggerita dal Cantor, che cioè in quel tempo esistevano delle scuole fra loro rivali, delle quali alcune seguivano esclusivamente i matematici greci ed altre per opposizione i matematici indiani.

196. Intorno al medesimo tempo vissero il persiano Abu Gafar al Hazin (cioè il bibliotecario), Abu Said Ahmed ben Mohamned al Singari del Khorasan, e Abu'l Gud Mohammed ben al Zeit, i quali si occuparono principalmente della costruzione delle equazioni per mezzo della intersezione delle sezioni coniche. Abbiamo già detto che Abu Gafar al Hazin risolvè l'equazione alla quale Almahani avea ricondotto il problema di Archimede, la quale equazione conteneva il cubo ed il quadrato dell' incognita e un termine noto; ma è merito di Abul Gud non solo di avere, mediante le sezioni coniche, risoluta l' equazione $x^3+1=3x$, alla quale conduce la costruzione del nonagono, ma di aver anche risoluta l'equazione completa $x^3-x^2-2x+1=0$, alla quale si perviene nella costruzione dell' ettagono. E in questo tempo vissero altresì Abu'l Hasan Ali ben Ahmed al Nasawi, nativo di Nasa nel Khorasan, che scrisse in persiano un trattato di aritmetica per gl'impiegati delle finanze del re Magd-ed-daula (997-1029), Irak persiano, trattato ch' egli poi nel 1030 riscrisse in arabo col titolo *Tractatus satis faciens;* Abu

Mahmud al Hogandi, di Hogand nel Khorasan, il quale fece delle osservazioni nel 992, e coltivò pure l'aritmetica teorica; e Seih Abu Gafar Mohammed ben al Hosein.

197. Uno dei principali matematici arabi, Abui'l Reihan Mohammed ben Ahmed al Biruni, cioè di Birun nel Khowarezm, visse in Gazna nella splendida corte di Mahmud il Gaznevida (998-1030) fra poeti e filosofi e morì probabilmente nel 1038. Viaggiò lungamente nell'India e scrisse nel 1031 una fedele relazione intorno allo stato della scienza come egli l'avea trovata nelle provincie dell'Indostan sottomesse da Mahmud.

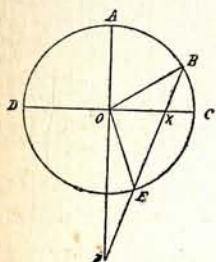



Fig. 44.

A lui devesi la seguente trasformazione del celebre problema della trisezione di un angolo. È noto che la trisezione dell'angolo AOB (Figura 44) si può ridurre al problema di tracciare $EF = OE$, poichè allora dalla figura chiaramente si scorge che l'angolo in F è eguale ad $^1/_3\, AOB$. Ora Albiruni trasformò questo problema nell'altro di condurre la BF in modo che, se X è il punto ove essa interseca il raggio OC perpendicolare ad OA, si abbia $OC^2 = OX^2 + OC.BX$. È facile vedere che questo problema si accorda col precedente, poichè avendosi $OC^2 = OX^2 + DX.XC = OX^2 + BX.XE$, se è anche $OC^2 = OX^2 + OC.BX$, sarà $XE = OC$, epperò anche $FE = OE$. Questo problema di dividere OC in X in modo che sia $OC^2 = OX^2 + OC.BX$ fu da Albiruni proposto pubblicamente ai geometri e risoluto da Abul Gud mediante l'intersezione di una iperbole equilatera con una parabola.

198. Lo splendore del regno fondato dal sopradetto Mahmud fu di breve durata, poichè dopo poco rapidamente fu conquistato dai principi Selgukischi appena civilizzati. Però il persiano Nitam ul Mulk, visir di uno

dei primi principi di questa dinastia, rivolse il suo favore alle scienze e protesse il celebre matematico Giyat eddin Abul Fath Omar ben Ibrahim al Hayyami, nato a Naisabur, ove morì nel 1123. A questo matematico si deve un nuovo principio d'intercalazione nel calendario persiano, cioè l'era di Gelaleddin.

Gli Arabi avevano imparato dagli Indiani l'estrazione delle radici quadrata e cubica, ed Omar Alhayyami insegnò l'estrazione delle radici di qualunque grado ed anche la legge della formazione dei coefficienti binomiali per un esponente intero e positivo. Abbiamo già visto che i matematici arabi risolvevano le equazioni di terzo grado mediante intersezioni delle sezioni coniche e Abul Gud aveva già scritto al principio dell'XI secolo una memoria dal titolo « Sulla enumerazione delle forme (delle equazioni cubiche) e del modo di riportare la maggior parte di esse per mezzo dell'analisi delle sezioni coniche »; ma è merito di Alhayyami di aver portato a compimento l'intera teoria nel suo scritto « Sulle dimostrazioni (geometriche) dei problemi dell'algebra » (1), ove tratta sistematicamente di tutte le equazioni cubiche, insegnando il modo di costruirle mediante sezioni coniche. Egli divide in questa sua opera le equazioni cubiche in due classi, le trinomie e le quadrinomie, e ciascuna classe in famiglie e specie. Riportiamo qui il suo metodo per costruire l'equazione $x^3+bx=a$ della prima famiglia della prima classe. Posto $b=p^2$ e $a=p^2r$, trasforma l'equazione data in $x^3=p^2(r-x)$ e fatto (Fig. 45, pag. 199) $AB=r$, costruisce quindi, prendendo A come origine delle coordinate, la parabola $x^2=py$ ed il cerchio $y^2=x(r-x)$; l'ascissa $x=AM$ del punto P, intersezione delle due curve, è la radice dell'equazione. De-

---

(1) Quest'opera è stata pubblicata e tradotta dal Woepcke col titolo: *L'Algèbre d'Omar Alkhayyami* (Parigi, 1857).

vesi notare che egli considera le sole radici positive e nella maggior parte dei casi dice quale sia il numero di esse. Relativamente alle equazioni di 4° grado sappiamo dalla detta pubblicazione del Woepcke che gli Arabi costruirono l'equazione $(10-x)^2(100-x)^2 = 8100$ mediante l'iperbole $(10-x)y = 90$ ed il circolo $100-x^2 = y^2$.

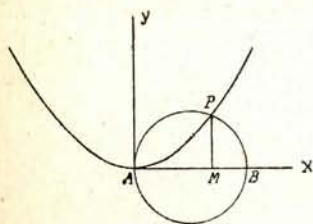



Fig. 45.

199. La soluzione delle equazioni cubiche è il più grande progresso degli Arabi nell'algebra. Il germe di ciò si trova presso i Greci, poichè fu per primo Menecmo che costruì le radici dell'equazione $x^3-2a=0$; devesi però osservare che mentre i Greci avevano lo scopo di determinare nel detto problema il lato x di un cubo doppio di un altro di lato a, gli Arabi volevano determinare le radici di equazioni numeriche. In Occidente le soluzioni delle equazioni cubiche trovate dagli Arabi rimasero ignote fino ad un mezzo secolo fa, e il Descartes (1596-1650) inventò di nuovo a suo tempo simili costruzioni. La costruzione per altro delle equazioni algebriche del 3° e del 4° grado fu data pel primo dall' inglese Thomas Baker nel 1684, nella sua *regula centralis*, la quale coincide per quella del 3° grado con la soluzione trovata 600 anni prima da Omar Alhayyami.

200. Con Alkarhi ed Omar Alhayyami la matematica cessa di essere coltivata dagli Arabi d'Oriente, e pel corso di duecento anni questa scienza può dirsi decaduta in tutte le contrade orientali dell'Islam, poichè le crociate fra il 1100 e il 1300 assorbirono tutta la forza di quei popoli. In questo tempo se i cristiani Europei ritrassero profitto dalla cultura araba di gran lunga in quell'epoca superiore alla propria, gli Arabi non ricevettero alcun miglioramento dagli Europei nella loro

scienza. Ma i crociati non furono i soli avversari degli Arabi; le orde barbariche dei Mongoli, dai lontani loro deserti avanzatesi nella prima metà del XIII secolo nella Persia e nei paesi del Tigri e dell'Eufrate, segnalarono il corso delle loro vittorie con spaventevoli distruzioni, dalle cui conseguenze l'Oriente non si è più finora riavuto, e nel 1256 il loro conduttore, il gran conquistatore Hulaya Ilhan abolì definitivamente il Califfato di Bagdad.

201. Ma mentre sembrava che questi avvenimenti avessero dovuto distruggere ogni vita scientifica, la scienza astronomica di nuovo incominciò in quelle contrade a fiorire per breve tempo. Gingizkan, nipote di Hulaya, animato da un vivo interesse per l'astronomia, fondò nel 1259 a Meraga nell'Aderbeigan un osservatorio grandioso, nel quale chiamò una schiera di astronomi e matematici, tra' quali il più celebre era HOGA (cioè *Magister*) NASIREDDIN ABU GAFAR MOHAMMED AL TUSI, cioè nativo di Tus, la capitale del Khorasan, nato nel 1201 e morto nel 1274. Questi compilò le tavole chiamate d'Ilhan in onore del suo protettore, diffuse in tutta l'Asia; restaurò e pubblicò opere matematiche da lungo tempo dimenticate o mutilate; commentò le opere di Apollonio. Egli fece la più bella ed ultima traduzione in arabo degli *Elementi* di Euclide, introducendovi nuove dimostrazioni e tentando ancora di dimostrare il celebre postulato sulle parallele.

Le sue opere vertono su tutte le branche delle umane conoscenze. Però questo splendore fu di breve durata, come breve fu la dominazione mongolica.

202. Verso la fine del XIV secolo le orde tartariche guidate dal terribile Timurlenk (Tamerlano) sottomisero tutta l'Asia fino alla Siria; e questa nuova invasione anzichè arrestare la cultura araba, caso singolare, le arrecò un nuovo avanzamento. In Samarkand nella sua corte Tamerlano chiamò i più celebri scienziati ed ar-

tisti del tempo; suo figlio Sahnoh vi fondò una grandiosa biblioteca; e quando questi trasferì la sua residenza ad Herat, il figlio MOHAMMED BEN SAHROH OLUG BEK (1393-1449), dotto astronomo rimasto a governare le province settentrionali del regno, vi stabilì verso il 1420 un grande osservatorio astronomico ed insieme ad altri astronomi s'immortalò con la pubblicazione di nuove tavole astronomiche. Egli è l'ultimo degli astronomi che fiorirono fra gli Arabi d'Oriente.

203. Se reca meraviglia la forza espansiva con la quale i popoli orientali, di cui brevemente qui abbiamo accennato, conquistarono rapidamente vaste regioni, più meraviglia ancora deve arrecare la loro energia con la quale in meno di due generazioni da un infimo stato di cultura si seppero sollevare all'amore della scienza. Devesi però osservare che la vita scientifica dei popoli maomettani dipese unicamente dalla protezione sovrana, e quando dalla metà del secolo XV in poi venne a mancare una tale protezione, la scienza emigrò definitivamente dall'Oriente. Dobbiamo però ancora far qui cenno di alcuni matematici arabi che vissero nell' Africa settentrionale e nella Spagna.

204. Gli Arabi d'Oriente e quelli di Occidente, che erano sotto diverse dinastie, generalmente si mantenevano per inimicizie politiche ancor più separati di quello che si potrebbe supporre, pure avendo il medesimo credo religioso e parlando la medesima lingua. Per questa causa principalmente, e anche per la lontananza, le grandi opere di storia letteraria orientale maomettana dànno ben scarse notizie intorno alla cultura dei popoli del Magreb e della Spagna.

Poche ed incerte sono poi le notizie che i dotti occidentali Latini dànno intorno ai loro maestri spagnuoli, epperò se sappiamo che in Siviglia, in Cordova, in Granata, in Toledo ed altrove fiorivano scuole scientifiche, che vi esistevano importanti biblioteche, pochissimo sap-

piamo dello stato della matematica nella penisola iberica e nei paesi vicini dell'Africa.

205. In Egitto non nella sede della antica cultura greca, Alessandria, ma in Cairo da Bagdad passò la scienza araba, ed ivi fu raccolta da ABU'L HASAN ALI BEN AHI SA'ID ABDERRAHMAN, detto IBN YUNOS (960-1008), il quale per la liberalità dei Califfi Fatimidici, Aziz (975-996) e Hakim (996-1021), potè disporre di un osservatorio riccamente dotato e di una biblioteca più vasta della Alessandrina. Egli riunì in una grande opera, da lui chiamata in onore del suo protettore *Tavole Hahimitiche*, tutte le numerose sue osservazioni e quelle dei suoi predecessori, utili per la correzione delle costanti, e queste tavole godettero in seguito di una grandissima autorità. Come Albattani, costruì anch'egli una tavola delle cotangenti, servendosi della formola $l = v \frac{\cos\varphi}{\text{sen}\varphi}$, ma invece di porre $v = 12$, facendo un passo innanzi, pose $v = 60$, calcolando così le cotangenti con la medesima unità con la quale erano calcolati i seni; ed introdusse qualche volta nelle formole invece del quoziente $\frac{\text{sen}\varphi}{\cos\varphi}$ per brevità l'espressione *ombra*, ma giammai adoperò le sue tavole delle ombre pel calcolo di angoli diversi delle altezze solari. Inventò inoltre un metodo per costruire una tavola di seni di 10′ in 10′, la quale è esatta fino ai minuti terzi.

206. Sulla fine del X secolo e sul principio dell'XI visse altresì il matematico ed astronomo ABU ALI AL HASAN BEN HOSEIN BEN AL HAITAM, detto anche ALHAZEN od IBN AL HAITAM, nato a Bassora il 950 e morto al Cairo il 1038. Oltre l'incredibile numero di opere, delle quali conosciamo i titoli, a lui è dovuto uno scritto in due libri del genere dei *Data* di Euclide, la cui prima parte contiene la determinazione di numerosi luoghi geometrici, che conducono ad una circonferenza, come il

luogo di un punto tale che il rapporto o la somma dei quadrati delle sue distanze da due punti fissi sia costante. L'autore dice che queste « sono cose del tutto nuove, e delle quali anche il genere era incognito ai geometri antichi » (cioè ai Greci). Benchè ciò in realtà non sia vero, essendo questo scritto analogo a quello *De locis planis* di Apollonio, pure l' autore arabo non conoscendo nè questo scritto nè l' opera di Pappo, merita molta lode per aver trovato da sè qualche cosa di simile.

207. Passando ora al Marocco, dobbiamo nominare primieramente ABU ISHAK NUR ED-DIN AL BITRUDSCHI, noto ai Latini sotto il nome di *Alpetragius,* astronomo e matematico del secolo XII, che si dichiarò contrario alla complicata ipotesi degli epicicli di Tolomeo.

208. Nel secolo successivo visse ABUL HASAN ALI, noto anche sotto il nome IMAM AL AUHAD ALI HASAN BEN ALI AL MERAKESI, che scrisse un' importante opera intorno agl' istrumenti astronomici, nella quale si distingue per novità e valore teorico la gnomonica ampiamente trattata.

Al medesimo secolo appartiene il Marocchino ABUL ABBAS BEN MOHAMMED BEN OTMAN EL AZDI detto IBN AL BANNA, cioè il figlio dell' architetto, che nacque a Marocco fra il 1252 e il 1257. Scrisse un trattato di Aritmetica col titolo *Talhis,* nel quale sono calcolate le somme dei quadrati e dei cubi dei primi n numeri interi.

209. Passando ora agli Arabi della Spagna, ben poco, come abbiamo innanzi osservato, conosciamo del progresso della matematica in quella regione. Il nome del più antico matematico venuto fino a noi è ABUL KASIM MASLAMA BEN AHMED AL MADSHRITI, morto nel 1007, autore di uno scritto mistico sui numeri amicabili. Insegnò a Cordova ed i suoi discepoli fondarono scuole oltre che a Cordova, a Dania e a Granada.

210. Nella seconda metà del secolo XI, verso il 1080, visse a Toledo Abu Ishak Ibrahim el Zerkali, da alcuni anche chiamato Abraham Alzarachel ovvero Abrusakh Arzachel, a cui si deve un trattato sull'Astrolabio, e le *Tabulae Toledanae,* ch'ei calcolò unitamente ad altri astronomi. Ma il più grande fra gli astronomi arabi di Spagna senza dubbio è stato Gabir ben Aflah di Siviglia, frequentemente chiamato Geber, contemporaneo di Zerkali. Egli nella sua opera *De Astronomia* si oppose, più liberamente che dagli Arabi in generale non siasi fatto, alla teoria di Tolomeo, cui non di rado attaccò con violenza; e nella Trigonometria, alla quale è dedicato il primo libro della detta opera, segnò un nuovo progresso.

Non seguendo l'esempio di tutti i più antichi noti scrittori di Astronomia, egli tratta la Trigonometria separatamente ed è l'unico astronomo arabo che dà complete dimostrazioni delle sue proposizioni. E per queste dimostrazioni egli ancora non segue Tolomeo, cioè non deduce le sue formule relative al triangolo sferico dalla regola *sex quantitatum* di Menelao, secondo la quale, se i lati di un triangolo sferico sono tagliati da una trasversale sferica, il prodotto dei seni di tre segmenti non contigui eguaglia il prodotto dei seni degli altri tre; ma segue un metodo tutto suo proprio detto *delle quattro quantità,* che deducesi dalla seguente proposizione: Se AF e CE (Fig. 46), sono due archi di circoli massimi intersecantisi in B e se CA ed EF sono altri due archi di circoli massimi perpendicolari ad AF, si avrà la proporzione $\text{sen}BC : \text{sen}CA = \text{sen}BE : \text{sen}EF$. Ora Geber, applicando questo teorema sul triangolo sferico ABC rettangolo in A, facendo $BE = BF = 90^\circ$, in modo che l'angolo in F è retto e $\text{sen}EF = \text{sen}B$, $\text{sen}BE = 1$, deduce

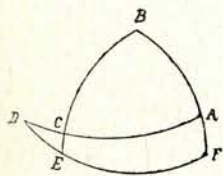



Fig. 46.

(prop. 13) la relazione sen$b$ = sen$a$ sen$B$. Essendo D il punto d'intersezione di AC ed EF, applicando il teorema antecedente nel triangolo DCE rettangolo in E, ricava (prop. 14) la relazione senDE = senDC sen$C$, ossia cos$B$ = cos$b$ sen$C$. Troviamo così per la prima volta esplicitamente enunciata e dimostrata questa *quinta* (1) formola fondamentale del triangolo sferico, formula che giustamente ora è detta « teorema di Geber ». Relativamente alla Trigonometria piana Geber non avanzò di un passo Tolomeo; e reca meraviglia il vedere come egli calcola con le corde degli angoli doppi, mentre nella sua Trigonometria sferica adopera esclusivamente i seni ed i coseni. Tanto era difficile ad un arabo di buon senso di liberarsi dalla antica consuetudine! Vi fu un tempo in cui, facendosi derivare la voce *Algebra* da *Gabir* o *Geber,* fu egli creduto erroneamente l'inventore di questa branca della matematica.

211. Dalla metà del XIII secolo in poi la preponderanza politica dei cristiani sui maomettani andò sempre aumentando nella penisola iberica, tanto che questi nel 1236 perdettero Cordova, nel 1248 Siviglia, limitandosi il loro dominio al regno di Granata. Intorno al medesimo tempo si estinse in quella regione l'astronomia araba, consegnando tutto il suo sapere quasi come eredità ai cristiani; e Alfonso X re di Castiglia (1252-1284), imitando l'esempio dei Califfi, chiamò alla sua corte varî astronomi Mauri, Ebrei e Cristiani, e furono costruite nuove tavole, sulla base di quelle di Zerkali,

---

(1) Nelle opere astronomiche anteriori a quella di Geber, sia in Tolomeo che in scrittori arabi, si trovano quattro formole relative al triangolo rettangolo, che nel moderno linguaggio corrispondono alle seguenti:

$$\cos a = \cos b \cos c, \quad \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B,$$
$$\operatorname{tg} b = \operatorname{sen} c \operatorname{tg} B, \quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C.$$

La sesta cos$a$ = cot$B$ cot$C$ è restata ignota fino al XVI secolo ed è dovuta a Vieta.

e tradotte in lingua castigliana numerose opere degli Arabi.

Da questo tempo in poi gli Arabi non ebbero più veruna influenza sulla scienza dei Latini e le tavole Alfonsine formarono quindi innanzi la base dello studio astronomico.

212. Di matematici arabi della Spagna posteriori non possiamo citare che ABUL HASAN ALI BEN MOHAMMED ALKALSADI (morto nel 1486 ovvero nel 1477) dell'Andalusia o di Granata, il quale scrisse un trattato di Aritmetica col titolo « *Scoperta dei segreti della scienza di Gubar* (1) ed un Commento al *Talchis* ed è a lui dovuto un singolare metodo di divisione detto *denominazione,* mediante il quale una frazione il cui denominatore N è eguale al prodotto dei numeri decrescenti $a_1, a_2, a_3,$ è posta sotto la forma $\frac{M}{N} = \frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_1 a_2} + \frac{m_3}{a_1 a_2 a_3}$ scritta col simbolo $\frac{m_3\ m_2\ m_1}{a_3\ a_2\ a_1}$. P. es. volendo denominare la frazione $\frac{196}{385}$, ove $385 = 11.7.5$, Alkalsadi opera nel seguente modo: divide 196 per 5 ed ha $196 = 5.39 + 1$; divide 39 per 7 ed ha $39 = 7.5 + 4$, epperò $196 = 5.(7.5 + 4) + 1$, donde

$$\frac{196}{385} = \frac{5.(7.5 + 4) + 1}{11.7.5} = \frac{5}{11} + \frac{4}{11.7} + \frac{1}{11.7.5},$$

ch'egli scrive $\frac{1.4.5}{5.7.11}$.

213. Mentre presso gli Arabi di Oriente l'algebra era trattata geometricamente, gli Arabi d'Occidente studiarono l'aritmetica e l'algebra indipendentemente

---

(1) La parola *Gubar* propriamente significa, come già abbiamo osservato, *polvere* e qui sta ad indicare *calcolo scritto con numerali* in opposizione al *calcolo mentale*.

dalla geometria. E presso questi troviamo un simbolismo algebrico che forse rimonta al tempo di Ibn Al Banna. Ciò non è privo d'interesse per la nostra storia, poichè questo simbolismo è stato imitato nelle traduzioni latine fatte dagli Europei. Ed a proposito del simbolismo algebrico crediamo utile di riportare qui la seguente classificazione dell' Algebra dovuta al Nesselmann. Questi ha diviso l'Algebra in tre classi:

1°. *Algebra rettorica*, nella quale non si fa uso di alcun segno, ma si indicano le operazioni, scrivendone le parole corrispondenti. A questa classe appartengono le opere degli Arabi di Oriente, quelle di Giamblico e di Timaride, le opere dei primi matematici italiani e di Regiomontano. L' equazione $x^2 + 10x = 39$ era p. es. scritta da Alhowarizmi nel seguente modo: *un quadrato e dieci della sua radice eguagliano trentanove unità.*

2°. *Algebra sincopata*, nella quale, come nella rettorica, tutto è scritto mediante le parole corrispondenti, facendo però uso di abbreviazioni per le operazioni e per le relazioni di uso più frequente. A questa classe appartengono l'opera di Diofanto, le opere degli Arabi d'occidente, quelle dei successivi scrittori europei fino alla prima metà del secolo XVII, escluse le opere di Vieta.

3°. *Algebra simbolica*, nella quale tutte le relazioni e tutte le operazioni sono rappresentate da simboli speciali. A questa classe appartengono le opere degl' Indiani e quelle degli Europei dalla metà del secolo XVII in poi.

214. Riepilogando con Charles: « Gli Arabi hanno mostrato di avere grande cura e trasporto per la matematica; così ebbero una conoscenza completa delle opere e del sapere dei geometri greci; perfezionarono notevolmente la Trigonometria dandole la sua forma moderna. Nelle altre parti della Geometria sembra che non abbiamo sorpassato i Greci, sia perchè mancanti di genio inventivo, sia perchè, avendo essi rapidamente

acquistato vaste conoscenze in tutto il campo delle scienze, non si curarono di estenderne i limiti.

« Però, sotto un altro rapporto, essi superarono i Greci; poichè, avendo conosciuta l'Algebra degl'Indiani, l'applicarono alla Geometria ed in questo genere di ricerche si spinsero fino alla soluzione delle equazioni di 3° grado mediante costruzioni geometriche. Infine trattando l'una mediante l'altra e per gli ausilî che queste due parti mutuamente si prestano, la Geometria dei Greci e l'Algebra degl'Indiani, essi impressero alla loro matematica un carattere proprio, originale, che trasmisero agli Europei, ed è in questa impronta speciale che devesi trovare l'origine ed il fondamento della superiorità acquistata rapidamente nel secolo XVI sulla Geometria dell'antiquità ».

CAPITOLO XII.

LA SCUOLA BIZANTINA.

215. Prima di trattare della storia della matematica in Europa durante il Medio-Evo, crediamo opportuno di dare un cenno sulla scuola bizantina.

Quando nel 642 il Califfò Omar I prese Alessandria, i filosofi che ancora colà insegnavano, emigrarono a Costantinopoli, che divenne così il centro della cultura greca in Oriente, iniziando la scuola di cui qui brevemente trattiamo. Ma da una parte le guerre e d'altra parte gl' ingegni occupati in sottigliezze teologiche e pedantesche, fecero sì che questa scuola non segnasse alcun progresso nella nostra scienza.

216. A capo dei dotti che vissero a Bisanzio tenendo ancora accesa la vacillante fiammella del sapere, è posto un tal LEONE del IX secolo, che scrisse opere di astrologia, e al quale l' Europa è debitrice dell' unico manoscritto di Archimede tuttora posseduto. Però uno dei primi membri di questa scuola fu ERONE DI COSTANTINOPOLI, che visse nella prima metà del X secolo e che spesso è chiamato ERONE IL GIOVANE per distinguerlo da Erone di Alessandria. Scrisse sulle norme del suo omonimo di Alessandria un trattato di geometria pratica, *Geodaesia*, pubblicato in latino da Barocio con il trattato *Machinis bellicis* (Venezia, 1572) anche a lui attribuito. Vi si trova, senza alcuna dimostrazione, la regola di calcolare l' area di un triangolo in funzione dei lati.

217. Durante il X secolo gl'imperatori Leone VI e

Costantino VII mostrarono grande interesse per l'astronomia e la matematica, ma lo stimolo imperiale non potè galvanizzare la scienza, e dobbiamo entrare nel secolo successivo per poter citare uno scritto sul *quadrivium* ed un *Compendium mathematicum* di MICHELE PSELLUS, che nacque verso il 1020. Non vi è che una povera esposizione delle divagazioni aritmetiche dei rinnovatori del pitagorismo e del platonismo.

218. Nella prima metà del XIV secolo visse il monaco MASSIMO PLANUDE che nel 1327 fu inviato quale ambasciadore a Venezia da Andronico II. Egli scrisse un opuscolo col titolo *Aritmetica secondo gl'Indiani*, importante per la storia, poichè addimostra che in quell'epoca a Costantinopoli eran noti i numerali indiani, ed un commento su i due primi libri dell'*Aritmetica* di Diofanto.

L'Aritmetica di Planude si chiude coi due seguenti problemi:

1°. Un tale, stando per morire, si fece portare lo scrigno e divise fra' suoi figli il proprio avere con le seguenti parole: « Voglio dividere equamente il mio denaro fra' miei figliuoli: il primo si avrà una moneta ed il settimo del rimanente, il secondo due ed il settimo del resto, il terzo tre ed il settimo del resto ». Giunto a questo punto morì senza essere arrivato al termine nè del denaro nè dell'enumerazione dei figli. Desidero conoscere quanti erano i figli e quanto era il denaro (1).

---

(1) Se x indica il numero delle monete, si ha l'equazione:

$$1 + \frac{x-1}{7} = 2 + \frac{1}{7}\left\{x - \left(3 + \frac{x-1}{7}\right)\right\},$$

da cui $x = 36$; epperò il primo figlio ebbe 6 monete ed altrettante ne ebbero gli altri 5 figli. Questo problema è stato generalizzato da Bachet de Méziriac nei suoi *Problèmes plaisants et délectables*, 5ª ed., Paris, 1884, pag. 158.

Planude indica e verifica la soluzione, ma non dice come l'abbia trovata.

2°. Trovare un rettangolo avente lo stesso perimetro di un altro e l'area multipla di quella del secondo.

Per questo secondo problema suggerisce di prendere come lati di uno dei rettangoli cercati q^3-q e $q-1$ e come lati dell'altro q^3-q^2 e q^2-1, essendo q il rapporto dato delle due aree. Però non dice come si perviene a questa elegante soluzione, la quale, secondo il Loria, « non è farina del suo sacco ».

219. Contemporaneo di Planude fu il monaco BERNARDO BARLAAM, vescovo di Geraci, nato a Seminara di Calabria nel 1290, morto nel 1348. Uomo di grande intelligenza, da Andronico fu inviato ad Avignone, ove risiedevano allora i papi, con la missione di riunire la chiesa greca e la latina, e durante il suo soggiorno colà insegnò il greco a Petrarca. Al suo ritorno a Costantinopoli si rese famoso, avendo posto in ridicolo la strana pretesa dei monaci del monte Athos, i quali sostenevano che, appoggiando la barba al petto e fissando gli occhi sull'ombelico, vedevano una mistica luce che era l'essenza di Dio. Scrisse un'opera sulla logistica greca, interessante per la storia, poichè ci fa conoscere il metodo laborioso che usavano ancora in quel tempo i Greci per eseguire i calcoli sulle frazioni.

220. Dobbiamo ancora citare un altro monaco che visse nel XIV secolo, ISACCO ARGYRUS, morto nel 1372, che scrisse sull'astronomia, sulla geodesia, sulla geometria, sull'Aritmetica di Nicomaco e sulla trigonometria. I suoi scritti però sono quasi tutti ancora inediti presso varie biblioteche di Europa.

Nello stesso secolo visse a Costantinopoli altresì GIOVANNI PEDIASIMO, autore di un libro di geometria.

221. Importanti dal lato storico sono due lettere scritte da NICOLÒ ARTAVASDE da Smirne sopranominato RHABDA, che visse anch'egli nel XIV secolo. Nella

prima « improvvisata a Bisanzio di Costantino », come egli stesso dice, vi è un brano che si riferisce al simbolismo numerico digitale dei Greci, simbolismo descritto anche da Beda. Nella seconda sono risolti molti problemi del genere di quelli che si leggono nell'*Antologia greca*. Ne riportiamo uno per esempio. « Un tale dice ad un altro : $^1/_5$ e $^1/_6$ delle argirie (monete di argento) che posseggo, fanno insieme 21; quante argirie possiedo? » La regola data dal Rhabda per risolvere questo problema coincide con la formola $x = \frac{mna}{m+n}$, la quale ci dà la soluzione dell'equazione $\frac{x}{m} + \frac{x}{n} = a$.

222. L'ultimo matematico, se pur merita tale titolo, col quale chiudiamo questo breve cenno sulla scuola bizantina, è EMANUELE MOSCOPULO, autore di un trattatello greco sui quadrati magici. Siccome questo scritto è dedicato a Nicola Artavasde Rhabda, l'autore deve anch'egli aver vissuto nel secolo XIV.

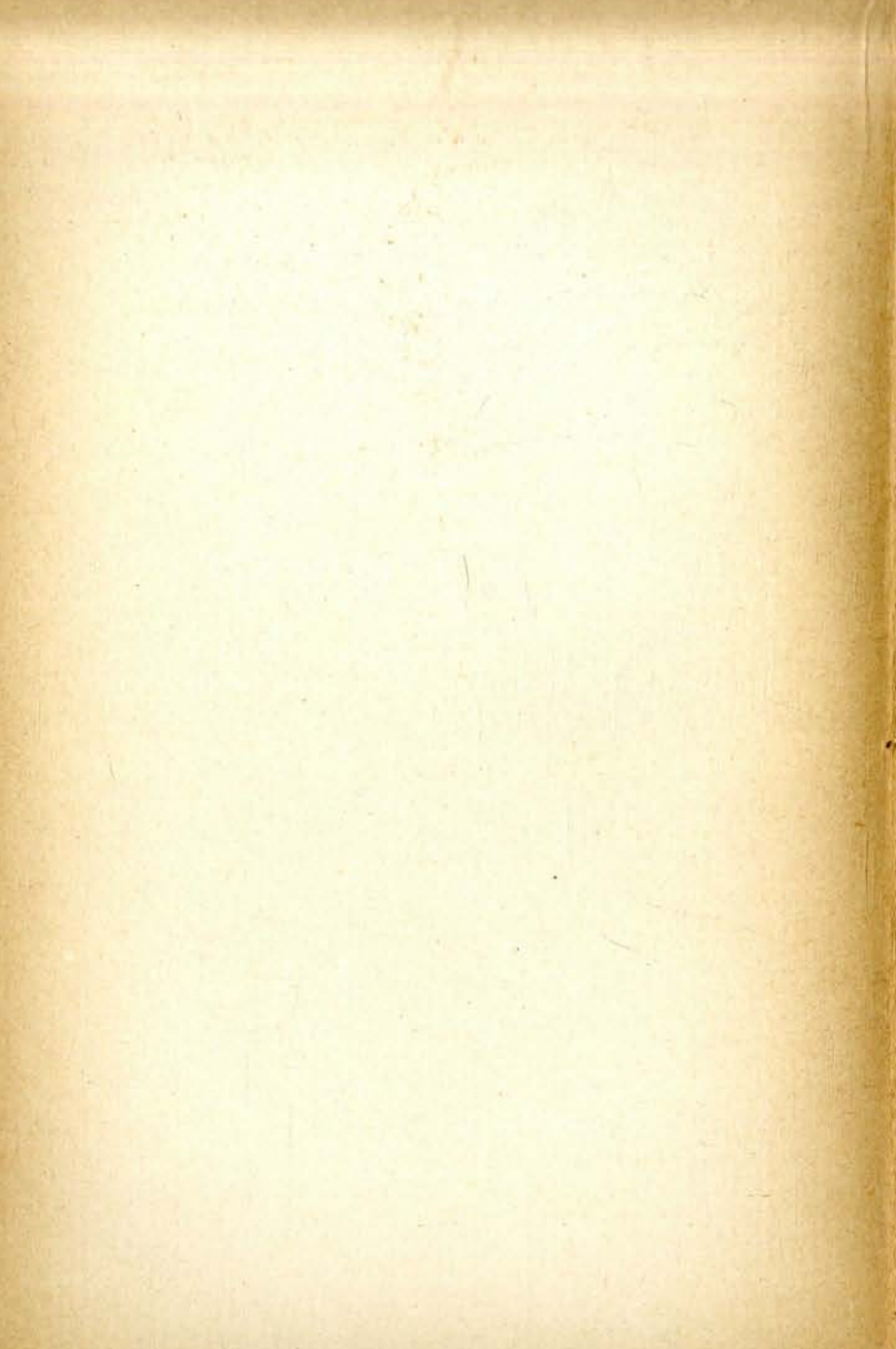
223. Dicesi quadrato magico un quadrato diviso, a mo' di scacchiere, in caselle, nelle quali sono segnati i primi n^2 numeri interi consecutivi disposti in modo che addizionandoli o in linee verticali o in linee orizzontali od anche secondo le diagonali si abbia sempre per somma $\frac{1}{2}n\,(n^2+1)$. Gli astrologi attribuivano ad essi particolari e segrete virtù; e Cornelio Agrippa (1486-1535) nel suo libro *De occulta philosophia* dedicò i quadrati magici di 9, 16, 25, 36, 49, 64 e 81 caselle ordinatamente a Saturno, a Giove, a Marte, al Sole, a Venere, a Mercurio ed alla Luna.

Non sappiamo quale sia stata l'origine di questi quadrati; è ben difficile ch'essi debbano la loro origine a Moscopulo, il quale non si atteggia a matematico originale; ed i metodi da lui dati riguardano casi parti-

colari (1). Non è improbabile che l'origine di questi quadrati debbasi ricercare nell'India, poichè il De la Loubère, il quale, inviato straordinario presso il re di Siam, tante cognizioni degli Indiani trasmise all'Europa nella relazione del suo viaggio del 1687, vi portò anche un metodo degl' Indiani di Surata non molto dissimile dal primo di Moscopulo, dandone altresì un' ingegnosa ma complicata dimostrazione, come si legge in una delle due memorie che il de Lahire presentò all'Accademia delle scienze nel 1705.

224. Presa Costantinopoli nel 1453 da Maometto II, sul suolo ellenico scomparve anche l'ultima traccia della scienza greca: ma la caduta dell'impero bizantino grandemente giovò alla cultura dell'Europa occidentale, poichè fuggendo i dotti in Italia, non solo vi portarono i preziosi manoscritti delle opere del genio greco, ma contribuirono grandemente perchè in Italia prima e poi nel resto di Europa tornasse il gusto della classica letteratura, iniziando l' epoca memoranda della rinascenza delle lettere e delle scienze.

---

(1) Il primo che abbia dato una regola generale per la formazione dei quadrati magici, fu Bachet de Méziriac (1577-1638), nei suoi *Problèmes plaisants*, regola ch' egli dice *bellissima* e *facilissima*, ma che riguarda i quadrati di radice impari (cioè per n numero dispari). Il Frenicle (1605-1670), uno dei primi membri dell' Accademia francese delle scienze, profondo aritmetico, diede per primo metodi generali pei quadrati magici di radice impari e pari; ma chi più di tutti si occupò del problema della costruzione di questi quadrati, dando più metodi ed eleganti ed ingegnose dimostrazioni, fu Filippo de Lahire (1640-1718). Di essi non disdegnò di occuparsi anche il celebre analista Fermat (1601-1665).

CAPITOLO XIII.

MEDIO-EVO.

Dal VII al X secolo.

225. Dobbiamo ora tratteggiare quel lungo periodo nel quale l'Europa, staccata dal movimento intellettuale e scientifico dell'antica Grecia, rimase avvolta nelle più dense tenebre. Vi fu un tempo, verso il VI secolo, che spenta ogni attività letteraria, celebrati maestri di matematica niente altro sapevano che una spiegazione di parole; che *matematico* voleva dire *astrologo*, *indovino*, e la parola *mathesis* serviva ad indicare l'astrologia. Perciò il nome della nostra scienza era tanto in discredito che una legge del codice Giustiniano portava il titolo: *De maleficis et mathematicis et ceteris similibus*, e comandava: *ars autem mathematica damnabilis interdicta est omnino.* Ma col ridestarsi del sapere, dopo che le conoscenze matematiche degli Arabi furono trapiantate in Occidente ed i tesori dell'antichità l'uno dopo l'altro furono schiusi, allora incominciò di nuovo il libero e fecondo lavoro nel campo della matematica e tornò in onore il suo nome.

226. Dopo la morte di Boezio e di Cassiodoro si spense in Italia l'attività matematica, e passerà quasi un secolo perchè si possa trovare nel mondo latino il nome di uno scrittore della nostra scienza. ISIDORO, nato a Cartagine nel 570, vescovo di Siviglia dal 601 fino alla sua morte nel 636, scrisse una specie di enciclopedia dal titolo *Origini*, opera modellata secondo le enciclopedie romane di Marziano Capella e di Cassiodoro.

Egli, come Boezio e Cassiodoro, incomincia col definire le sette scienze, di cui si componeva il *trivium* ed il *quadrivium*. Nel III libro l'aritmetica teorica occupa il primo posto e dopo strane etimologie dei nomi dei numeri latini vi si trovano alcune considerazioni dei pitagorici e di Boezio sulle proprietà generali dei numeri. Non si trova cenno di aritmetica pratica; e la geometria, la musica e l'astronomia si riducono ad una magra compilazione di definizioni.

227. Dopo Isidoro segue ancora un secolo di oscurità che è alla fine dissipata dalla comparsa di Beda il Venerabile, il più dotto uomo del suo tempo. Nacque presso Girvey nel Northumberland nel 672 e morì monaco a Girvey nel 735 in un chiostro ricco di libri, dopo di aver composto numerose opere.

Nel 1° capitolo del suo libro *De temporum ratione* insegna un metodo per calcolare la festa pasquale: in un altro suo scritto *De computo vel loquela digitorum* espone un metodo pel calcolo digitale, calcolo che doveva essere comunemente usato e in Occidente e in Oriente.

228. La corretta determinazione del giorno pasquale in quell'epoca era un problema che grandemente agitava la chiesa di Roma; e perciò era necessario che vi fosse almeno un monaco in ciascun monastero abile a determinare i giorni di festività religiose e che potesse compilare il calendario.

Richiedendo ciò alcune conoscenze di aritmetica, troviamo che in quell'epoca l'arte del calcolo aveva il suo posto nell'insegnamento, il quale era tutto circoscritto nelle pareti dei conventi.

229. L'anno della morte di Beda è anche quello della nascita a York dell'anglo-sassone Alcuino che dal 760 insegnò nel suo paese natio fino al 781, quando fu chiamato da Carlomagno a dirigere l'istruzione nel vasto impero francese: dal 796 all'804, data della sua morte, fu direttore della scuola di S. Martino a Tours. Nelle

sedi episcopali e nei monasteri egli fondò scuole, nelle quali s'insegnavano i salmi, la scrittura, il canto, il *computus* e la grammatica, intendendo per *computus* non solo la regola per la determinazione della festa pasquale ma probabilmente l'arte del calcolo in generale. È vero che non conosciamo esattamente i metodi che allora usavansi pel calcolo, ma non è improbabile che Alcuino conoscesse gli apici di Boezio o i metodi romani pel calcolo sull'abaco. Egli poi appartiene a quella lunga schiera di scrittori che trascinavano la teoria dei numeri nella teologia; e così il numero degli esseri creati da Dio, il quale creò ogni cosa perfetta, è 6, perchè 6 è un numero perfetto, mentre essendo 8 un numero imperfetto, da esso emana la seconda origine dell'umanità; e si dice che 8 erano le anime racchiuse nell' arca di Noè. Ad Alcuino è attribuita una raccolta di problemi dal titolo *Propositiones ad acuendos juvenes*, ove le aree del triangolo e del quadrilatero sono calcolate con le medesime formole inesatte usate dagli Egiziani e date anche da Boezio nella sua geometria. Vi si trova calcolata la somma dei termini di una progressione aritmetica, mediante l'osservazione che la somma di due termini equidistanti dagli estremi è costante. Ecco un esempio dei problemi di questa raccolta: « Un cane inseguendo un coniglio, che ha un vantaggio di 150 piedi, fa 9 salti mentre il coniglio ne fa 7. Per determinare in quanti salti il cane raggiunge il coniglio devesi dividere 150 per 2 ». Vi si trova anche il vecchio problema della cisterna, che consiste nel determinare il tempo che più condotti di acqua impiegano a riempire insieme una cisterna, conoscendo il tempo che v' impiega ciascuno; problema che si trova in Erone, nell' Antologia greca ed anche nelle opere indiane. Molti problemi di questa raccolta mostrano la loro origine romana, specialmente quello che riguarda l'interpretazione del testamento, na-

scendo due gemelli. In riguardo poi a problemi dilettevoli ricordiamo il seguente:

« Un barcaiuolo deve passare all'altra sponda di un fiume un lupo, una pecora ed un cavolo; ma la sua barchetta è così piccola che non li può trasportare che uno per volta. Come dovrà fare per non lasciare mai soli nè il lupo con la pecora, nè questa col cavolo?»

Le soluzioni dei problemi *ad acuendos juvenes* non richiedono che la conoscenza delle 4 operazioni fondamentali con numeri interi e della soluzione di equazioni di primo grado; difficilmente s'incontrano numeri frazionarî, nè vi si richiede l' estrazione della radice quadrata.

230. Dobbiamo qui citare ancora HRABANUS MAURUS (788-856) noto come *Primus praeceptor Germaniae*, che insegnò matematica nelle scuole del monastero di Fulda. Però il suo *Computus* è un compendio di quello di Beda: scrisse anche una enciclopedia secondo quella di Isidoro di Siviglia col titolo *De universo, libri* XXII, *sive etymologiarum opus*.

231. Alla fine del IX ed al principio del X secolo visse ODONE, abate di Cluny (879-942), che insegnò prima nel Convento di San Martino a Tours, indi presso Remigio a Parigi. Scrisse delle regole pel calcolo sull'abaco oltre di un dialogo sulla musica.

232. Ma andato in pezzi il grande impero di Carlo Magno dopo la sua morte, seguì un periodo di guerre e furono quasi totalmente abbandonati gli studî fino a quando verso la fine del X secolo sotto il dominio della casa di Sassonia in Germania e dei Capeti in Francia non incominciò un periodo di calma. Le dense nebbie dell'ignoranza che avvolgevano l'Europa incominciano a sparire. Lo zelo col quale in questo tempo s'intraprende lo studio della matematica dai monaci nelle scuole annesse ai conventi è dovuto principalmente all' attività ed all'influenza di un solo uomo — GERBERTO — il più

grande matematico del X secolo in Europa. I suoi contemporanei considerarono la sua dottrina meravigliosa e molti anche lo accusarono di magia.

Per lungo tempo fu ritenuto di aver egli apprese le conoscenze matematiche presso gli Arabi di Spagna e di aver quindi per primo introdotto nell' Europa cristiana lo zero ed il principio del valore di posizione delle cifre numerali. Ma sulla scorta di documenti autentici si è potuto provare che Gerberto non è stato in alcuna opera discepolo degli Arabi di Spagna, ed esaminando i suoi scritti di matematica si è potuto concludere che la sua dottrina derivava unicamente dallo studio di Boezio.

Nacque nel 940 da poveri genitori nei monti dell'Auvergne e ricevè la sua prima educazione nella dotta scuola di Aurillac. Il suo primo viaggio è quello del 968 da Aurillac alla contea di Barcellona con il conte Borel, per completare la sua istruzione, presso Hatton, vescovo di Vich, città ove gli studî matematici erano in onore presso i monaci. Con Hatton visitò l'Italia, e poi si recò con l'ambasciatore di Lotario presso Ottone I a Reims, ove iniziò la sua attiva carriera d'insegnante.

La sua scuola divenne ben tosto delle più rinomate e fiorenti di quella regione, e per ben dieci anni ne tenne il rettorato. Nel Natale del 982 lo troviamo a Ravenna alla corte di Ottone II, ove sostenne col conto Utrico, il più dotto uomo di quella corte, una famosa discussione filosofica e matematica, la quale gli procurò dal re la nomina di abate del monastero di Bobbio, ricco di ogni sorta di manoscritti scientifici. Morto però Ottone alla fine del 983, Gerberto, circondato da gelosie ed odî e mal visto dal papa Giovanni XIV, dovette abbandonare la sua abazia per ritornare a Reims. Posto sotto una severa vigilanza pei suoi principî politici, riuscì a rifugiarsi nel 989 presso il re Ugo Capeto che nel 991 deposto l'arcivescovo Arnolfo di Reims, lo as-

sunse a quella cattedra. Il papa però non volle riconoscere questa nomina ed alla morte di Ugo, Gerberto dovette nel 997 cedere il posto ad Arnolfo. Si recò allora a Magdeburgo presso Ottone III, ch'era stato suo discepolo, il quale lo condusse seco in Italia, ove nel 998 lo elesse arcivescovo di Ravenna e l'anno seguente, dopo la morte del nuovo papa Gregorio V, lo assunse al pontificato sotto il nome di Silvestro II. Morì il 12 gennaio 1003.

233. Gerberto cercando di procurarsi copie di libri rari, allargava le sue conoscenze; e così a Mantova egli scopriva una copia delle opere di Boezio, unico libro da cui in quel tempo in Europa lo studioso poteva apprendere qualche cognizione in geometria. Egli studiò quest'opera con zelo e a lui si attribuisce anche un'opera sulla geometria. Quest'opera però mostra la profonda ignoranza di quel tempo, poichè non contiene che i più elementari argomenti e segue in tutto e per tutto Boezio. Devesi solamente notare che in riguardo alla costruzione in numeri razionali dei triangoli rettangoli, detti dall'autore *trianguli phytagorici*, si risolve un problema notevole per quell'epoca, poichè dipende da un'equazione di 2° grado. Esso è il seguente: « Data l'area S e l'ipotenusa a di un triangolo rettangolo, calcolare i cateti ». La soluzione di Gerberto tradotta in formola dà pei due cateti i valori ricavati dall'espressione

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+4S} \pm \sqrt{a^2-4S}\right).$$

Il primo scritto matematico del medio-evo che merita questo nome è una lettera di Gerberto ad Adalboldo (1), ove si spiega la ragione per la quale, calcolando

(1) *Gerberti epistola ad Abadoldum de causa diversitatis arearum in trigono aequilatero geometrice arithmeticeve exponso:* fa seguito alla Geometria di Gerberto. Di ADALBOLDO, monaco benedettino, poi vescovo

l'area di un triangolo equilatero con la formola *geometrica* $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ si ottiene un risultato diverso dall'altro che si ha con la formola *aritmetica* $\frac{a(a+1)}{2}$, ove a è il lato del triangolo. La ragione, secondo Gerberto, è che nell'ultima formola si tien conto di tutti i piccoli quadrati, di cui il triangolo si considera scomposto come nella Figura 47, non ostante che parte di alcuni di essi siano fuori del triangolo medesimo.

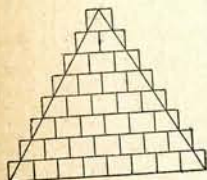



Fig. 47

Gerberto fece un accurato studio dell'Aritmetica di Boezio; ed in una lettera al suo amico Costantino, *De numerorum divisione*, per molto tempo attribuita a Beda, insegnò e divulgò la regola di questa operazione secondo il metodo di Boezio. Altri suoi scritti trattano del calcolo mediante l'abaco.

Con Gerberto incomincia, si può dire, la serie di quegli scrittori di aritmetica pratica dei secoli X e XI detti *abacisti*, così chiamati anche da Gerberto stesso nella sua *Geometria*, perchè continuatori della pratica greco-romana dell'abaco.

234. Molti contemporanei di Gerberto, riguardati come suoi discepoli, hanno anch'essi scritto sull'aritmetica pratica servendosi sempre dell'abaco. Fra essi qui nominiamo ADALBOLDO, vescovo di Utrecht, di cui abbiamo fatto cenno nell'ultima nota e BERNELINO di Parigi, che scrisse un *Liber Abaci*, pubblicato nelle Opere di Gerberto nell'edizione dell'Olleris (Parigi, 1867). In

---

di Utrecht, è uno scritto dedicato a Gerberto papa dal titolo: *De modo inveniendi crassitiem (soliditatem) sphaerae*; ove dà pel volume della sfera di diametro d l'espressione $^{11}/_{21}\ d^3$.

questo libro un capitolo è dedicato alle frazioni *duodecimali* usate dai Romani, il cui calcolo per la mancanza di un simbolismo conveniente era allora difficilissimo. Fra' contemporanei di Gerberto non trovasi però alcuno a lui superiore: egli fu in tutto il X secolo l'uomo più dotto, che maggiormente influì col suo insegnamento a Reims a divulgare nel suo tempo in Occidente le conoscenze matematiche dei Romani.

Secolo XI.

235. Durante l'XI secolo furono assiduamente studiate le opere di Gerberto e dei suoi discepoli; ma quantunque in questo periodo molte opere di aritmetica e di geometria siano state scritte, le conoscenze matematiche in Occidente rimasero scarsissime; e non poteva essere diversamente, poichè la sorgente da cui attingevasi il sapere proveniva da fonti romane che non racchiudevano alcun tesoro nel campo matematico.

Fra' matematici di questo secolo citeremo GUIDO DI AREZZO (990-1050), l'inventore delle moderne note musicali, che scrisse anche un trattato sull'abaco; FRANCONE di Lüttich, che scrisse anch'egli sull'abaco e dedicò inoltre all'arcivescovo Ermanno II di Köln un'opera in 6 libri sulla quadratura del cerchio, ed ERMANNO CONTRACTUS (1013-1054), monaco di Reichenau, il quale scrisse sull'abaco ed un'opera in due libri sulla costruzione e sull'uso dell'Astrolabio; inventò anche un giuoco numerico detto *Rhytmomachia*.

236. L'influenza di Gerberto si fece anche sentire nel secolo XII, poichè egli per la sua grande erudizione e per la sua grandissima attività infuse nel suo tempo nuova vita non solo agli studi di matematica ma anche a quelli di filosofia. Nella sua scuola a Reims e dalla Francia e dalla Germania e dall'Italia accorrevano discepoli, i quali, divenuti a loro volta insegnanti nei

propri paesi, non solo spiegavano l'uso dell'abaco e un po' di geometria ma anche quanto avevano appreso intorno alla filosofia di Aristotele. L'entusiasmo suscitato da questo insegnamento, man mano crescendo, fece nascere il desiderio di conoscere le opere complete dello Stagirita, di cui non si sapeva altro che quello che trovavasi negli scritti di Boezio. Il testo greco mancava, ma avendo i Latini saputo che gli Arabi, grandi ammiratori dei peripatetici, possedevano la traduzione delle opere di Aristotele e che essi le avevano anche commentate, pensarono finalmente di cercare e di tradurre i manoscritti arabi. Durante questa ricerca vennero a loro conoscenza anche le opere matematiche arabe e furono tradotte in latino. Lo zelo spiegato dai Latini nell'acquistare i tesori del sapere arabo supera forse quello degli Arabi stessi quando, nell'ottavo secolo, s'impossessarono della scienza dei Greci e degl'Indiani.

Incomincia in questo secolo XII a finire l'epoca degli abacisti per sorgere l'epoca feconda degli algoritmici, cioè dei seguaci dei metodi indo-arabi.

Secolo XII.

237. Al principio del XII sec. troviamo l'abacista, Radolfo di Laon, morto nel 1133, insegnante nelle scuole del Convento di Laon. Egli scrisse un trattato sull'Abaco; ove si trovano anche delle notizie storiche intorno all'arte del calcolo.

238. Una spiccata figura di matematico al principio di questo secolo è però Athelard di Bath od Adelardo, come è stato anche chiamato dal latino Adelhardus, monaco inglese. Viaggiò lungamente nell'Asia Minore, nell'Egitto e nella Spagna, e sfidando non pochi pericoli, apprese, la lingua e la scienza dei Maomettani. Ritornato in patria, tradusse gli *Elementi* di Euclide dall'arabo in latino, ed a lui l'Europa Occi-

dentale deve la prima traduzione dell' opera euclidea. È degno di nota il commento da Athelard aggiunto dopo la 32ª prop. del I libro, commento pubblicato dal Günther da una copia manoscritta dal Regiomontano, esistente nella biblioteca di Nurimberg, e che qui vogliamo riportare, poichè è il primo scritto geometrico di un autore del medio-evo, ove si addimostra il matematico rigoroso educato alla severa scuola d' Euclide. Dopo di aver egli osservato che in ogni poligono convesso, il cui perimetro quindi non s'interseca, la somma degli angoli interni è eguale a tante volte due retti quanti sono i lati meno 4 retti, e perciò nel pentagono convesso essa è eguale a 6 retti, e che la somma degli angoli esterni è sempre eguale a 4 retti, così prosegue: « Omnis penthagonus, cujus unumquodque latus duos se- « cat ex reliquis, habet quinque angulos duobus rectis ae- « quales, nam *fga* (Fig. 48) aequatur « per 32. *c* et *e* et *gfa* duobus *b* et *d*. « Igitur tres anguli trianguli *afg* aequan- « tur 5 angulis *a, b, c, d, e* quare per « secundam partem 32. patet intentum. « Omnis exagoniangulus, cujus unum- « quodque latus duos secat ex reliquis, « habet sex angulos aequales 4 rectis, vel « sic generaliter. Omnis poligonia, cujus unumquodque « latus duos secat ex reliquis, habet omnes angulos ae- « quipollentes tot rectis quantus est numerus angulo- « rum ejus duplicatus inde demtis octo; nam in omni « tali sunt tot trianguli parvi circumferentiales quot ha- « bet angulos, quare triangulorum circunferentialium « omnes anguli, qui supra basim sunt, valent octo rectos « per corollarium superius bis sumtum. Omnis poligoniae « cujus unumquodque latus 4 secat ex reliquis, omnes « anguli simul tot rectis aequales sunt quantus est « numerus angulorum ejus duplicatus dem tis inde 12 « Intersectio autem 4 laterum primum in eptagono re-

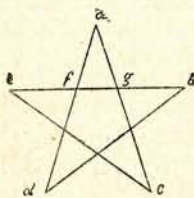



Fig. 48.

« peritur. Cujuslibet poligoniae cujus unumquodque la-
« tus secat ex reliquis 6, omnes anguli simul tot rectis
« aequales sunt quotus est numerus angulorum suorum
« duplicatus, demtis inde 16. Prima autem talium est
« ennagona. Hae omnes et similes ex praemissis osten-
« duntur ».

Ci troviamo qui innanzi ad una vera teoria dei poligoni stellati, teoria della quale si è anche occupato il Keplero, ma che poi dimenticata, fu dal Poinsot al principio del XIX secolo rivestita interamente a nuovo e presentata, quale veramente era, creazione del suo potente ingegno. Nel passo sopra riportato del monaco inglese non solo abbiamo i teoremi riguardanti la somma degli angoli interni dei poligoni stellati, ma anche un tentativo di classificazione dipendente dal numero, facile a determinarsi, dei punti in cui un lato rimane intersecato dal perimetro del poligono.

I teoremi sono i seguenti: 1°. La somma degli angoli interni di un pentagono stellato è eguale a 2 retti. 2°. La somma degli angoli interni di un esagono stellato è eguale a 4 retti. (In vero questo esagono non è in senso stretto un poligono stellato, ma invece composto di 2 triangoli intrecciati). 3°. La somma degli angoli interni di un poligono stellato di m lati e di 2ª specie è eguale a $(m—4)$ volte 2 angoli retti. 4°. La somma degli angoli interni di un poligono stellato di m lati e di 3ª specie è eguale a $(m-6)$ volte 2 angoli retti. 5°. Il primo poligono stellato di 3ª specie è l'ottagono. 6°. La somma degli angoli interni di un poligono stellato di m lati e di 4ª specie è eguale a $(m—8)$ volte 2 angoli retti. 7°. Il primo poligono stellato di 4ª specie è l'ennagono. 8°. In generale la somma degli angoli interni di un poligono stellato di m lati e della specie h è eguale a $(m—2h)$ volte 2 angoli retti.

Adunque ad Athelard devesi attribuire quest'ultimo teorema generale.

Athelard tradusse anche le tavole astronomiche di Mohammed ben Musa Hovarezmi, ed a lui si attribuisce altresì un trattato di aritmetica pratica secondo il metodo indo-arabo dal titolo *Algoritmi de numero Indorum*, che il principe Boncompagni trovò nella biblioteca di Cambridge e pubblicò a Roma nel 1857. Questo trattato non è che la traduzione latina dell'*Aritmetica* dello scrittore arabo; e se veramente Athelard ne è stato l'autore, devesi concludere ch' egli coltivò contemporaneamente il metodo indo-arabo con lo zero ed il metodo greco-romano dell'abaco, poichè egli scrisse altresì un'opera dal titolo *Regulae Abaci*.

239. Contemporaneo di Athelard è PLATONE DI TIVOLI ovvero PLATONE TIBURTINO, il quale verso il 1120 tradusse dall'arabo l'Astronomia di Albattani e la Sferica di Teodosio e dall'ebraico un trattato di geometria dell'ebreo Savasorda. In questo trattato si trova la formula del calcolo dell'area di un triangolo in funzione dei lati senza alcuna dimostrazione, dall' autore tralasciata perchè difficile.

240. Intorno alla metà del XII secolo troviamo a Toledo un gruppo di dotti cristiani, sotto la guida di Raimondo, arcivescovo di quella città, intenti a tradurre opere dall' arabo. Dobbiamo far cenno del più distinto fra essi, GIOVANNI DI SIVIGLIA, la cui attività si spiegò fra il 1130 e il 1150, e che principalmente tradusse opere intorno la filosofia di Aristotele. Egli però ha diritto ad un posto nella storia della matematica per il suo *liber algorismi*, pubblicato nel 1857 dal Boncompagni. Questo volume è compilato secondo il metodo indo-arabo, poichè vi troviamo il principio del valore di posizione delle cifre e lo zero sotto forma di piccolo cerchio, mentre presso gli Arabi di quel tempo era già predominante l'uso di rappresentare lo zero con un punto. In esso però si riscontra una importantissima

innovazione, poichè dopo di aver insegnato l'estrazione della radice quadrata mediante frazioni sessagesimali, presso a poco come il greco Teone nel suo Commento a Tolomeo, aggiunge l'estrazione della radice quadrata con numeri decimali, presso a poco come usò più tardi Girolamo Cardano (1501-1576), al quale, prima della pubblicazione del sopradetto trattato, era attribuito il merito di aver introdotto l'uso di questi numeri.

Da ciò si deve argomentare che fin dal XII secolo l'uso dell'aritmetica indiana avea condotto gli Arabi ad estendere la legge di posizione al di sotto dell'unità, ed a comprenderne il vataggio. Nel detto trattato vi è poi un capitolo intitolato *Excerptiones de libro qui dicitur Gebra et Muchabala*, ove si trovano risoluti i tre casi dell'equazione di 2° grado secondo il metodo dell' Alhovarezmi.

241. Anche nella Russia nel secolo XII incominciano gli studi della matematica limitatamente all' aritmetica ed all'agrimensura. Il monaco KIRICO di Nijni-Novgorod compose nel 1134 un *trattato dei calcoli cronologici e del computo*, ove sono citati altresì altri autori dell'arte del calcolo. In questi autori, i cui primi maestri dovettero essere i Greci, si constata lo strano fatto che essi tendono verso speculazioni aritmetico-algebriche, il che mostrerebbe che avessero avuto qualche comunicazione con gl'Indiani, mentre questi non ebbero alcuna diretta relazione coi sudditi degli Czar. Ed invero la loro numerazione molto limitata, che nel secolo XI non andava oltre 10000, raggiunse 10000000 nel secolo XII e nei secoli dal XIII al XVI 100000000 dapprima e poi man mano fino le unità del 13°, del 48°, del 49° ed in ultimo del 50° ordine. Il campo abbracciato dal loro calcolo si estese quindi lentamente, ed in fine si pervenne ad esprimere metodicamente i multipli delle unità dei diversi ordini mediante lettere. Nel libro di Kirico si trova

sotto il nome di *ore frazionarie* le suddivisioni di un'ora secondo il sistema quinario fino all' unità del 7° ordine $\left(\frac{1}{78125}\right)$.

242. Ma durante 5 secoli nelle prime scuole fondate dal clero greco-bulgaro gli studi scientifici erano poco fiorenti: in esse non s'insegnava neppure l' arte del calcolo, ed i Russi che desideravano apprendere le prime nozioni di aritmetica e di geometria dovevano frequentare scuole private, dirette da laici, le quali vivevano ignorate dallo Stato e dal clero. In queste, come risulta dai rari documenti esistenti, si apprendeva presso a poco ciò che nel mondo latino del medio evo era compreso nel *Trivium* e nel *Quadrivium*, cioè le sette arti liberali, la Grammatica, la Dialettica, la Rettorica, la Musica, l'Aritmetica, la Geometria e l'Astronomia. Per la matematica l'insegnamento però si limitava alle operazioni sui numeri, al calcolo delle frazioni, a certe nozioni di metrologia ed a nozioni di agrimensura.

243. Ritornando all'Occidente, dobbiamo menzionare ancora altri due dotti che nel secolo XII lavorarono a far conoscere ai Latini le opere degli Arabi, GHERARDO DI CREMONA e RODOLFO DI BRUGES. Il primo nato a Cremona nel 1114, m. a Toledo nel 1187, medico, matematico ed astrologo, visse lungamente nella Spagna per apprendervi l' arabo. Entusiasta della ricchezza della letteratura maomettana, dedicò tutto sè stesso alla traduzione delle opere arabe in latino e ne tradusse quasi 70, fra le quali, oltre la grande opera di Tolomeo, gli *Elementi* ed i *Data* di Euclide, la *Sferica* di Teodosio, un'opera di Menelao, il *Liber trium fratrum*, l'*Algebra* di Alhowarezmi, le tavole di Zarkali, l'Astronomia di Geber ben Atlah, ecc.

Dobbiamo poi a Rodolfo di Bruges la conoscenza della *Planisfera* di Tolomeo, ch' egli tradusse da una

versione commentata da un autore chiamato Molsem, non essendo a noi pervenuto il testo greco.

Secolo XIII.

244. L'epoca degli abacisti è tramontata: sorge ora quella degli algoritmici, ed il nuovo secolo segna nella storia della matematica un'èra novella. L'occidente di Europa già possiede l'aritmetica e l'algebra indo-araba e le opere più importanti del genio greco. Una mente matematica che fosse allora comparsa, avrebbe trovato il tempo propizio, avrebbe avuto a sè dinnanzi sufficiente materiale, sul quale esercitare il suo genio inventivo: una tale mente non è punto mancata, e la figura di Leonardo di Pisa adorna il vestibolo del XIII secolo. Però prima del XV secolo nessuna opera matematica od astronomica è stata tradotta direttamente dal greco.

245. Dai cenni innanzi riferiti si è visto che la matematica era principalmente studiata in Francia e nella Gran Brettagna ed insegnata da monaci nelle scuole dei conventi. Ma al principio del XIII secolo il genio di un sol uomo è stato capace di assegnare come nuovo soggiorno della matematica l'Italia, e quest'uomo non è stato un monaco, come Beda, Alcuino o Gerberto, ma un mercante che in mezzo ai suoi negozii trovò il tempo per gli studi scientifici. LEONARDO DI PISA è l'uomo a cui dobbiamo la prima rinascenza della matematica sul suolo cristiano. Della vita e delle opere di questo sommo matematico scrisse il Principe Baldassarre Boncompagni (1). In Italia Leonardo non avea

---

(1) B. BONCOMPAGNI, *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano*, Roma 1852; *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano*, Roma 1854. Egli poi pubblicò in 2 volumi gli *Scritti di Leonardo Pisano*, Roma, 1857-1862) che fino allora erano rimasti inediti.

avuto per predecessori che i due traduttori di opere arabe della prima metà del secolo XII, Platone di Tivoli e Gherardo di Cremona.

Nato nella seconda metà del XII secolo dal mercante Bonacci di Pisa, perciò detto anche Fibonacci (filius Bonacij), fu dal padre istruito nell'arte dell'abaco ed avviato al commercio.

Nel suo *Liber Abaci*, scritto una prima volta nel 1202 ed una seconda volta con delle aggiunte nel 1228, egli stesso ci racconta che, essendo suo padre notaio dei mercadanti pisani alla dogana di Bugia in Africa, colà prima si recò, ed in seguito avendo viaggiato nell'Egitto, nella Siria, nella Grecia, nella Sicilia, in Provenza, appreso il conteggio indiano, si persuase che questo era più perfetto di quello adottato in Europa. Soggiunge poi che essendosi occupato più attentamente di questo soggetto ed avendovi aggiunte le sue proprie ricerche e ciò che aveva potuto ricavare dall'Euclide, volle comporre un'opera in 15 capitoli « per utilità di coloro che « desiderano studiare questa scienza, la più perfetta « delle altre, ed affinchè in avvenire la gente latina non « se ne trovi del tutto ignara ». Quest'opera, scritta in latino, secondo il costume del tempo, incomincia così: « Novem figurae Indorum hae sunt 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1; « cum his itaque novem figuris et cum hoc signo 0, « quod arabice *zephirum* (1) appellatur, scribitur quilibet « numerus ». Essa introdusse le cifre e l'aritmetica indo-

---

(1) Gl'Indiani denominavano il segno dello zero sotto forma di cerchietto *sunya (= vuoto)*, che gli Arabi tradussero *as-sifr*, voce trascritta latinamente da Leonardo in *zephirum*. Da qui derivò la nostra parola *zero* scritta *zeuero, çeuero* nei primi trattati di aritmetica in volgare nel secolo XIV. Anche Fra Luca (1445-1509) chiama *çero* il segno 0.

Dalla stessa parola araba è derivata la parola *cifra* per la denominazione comune dei dieci segni numerali. E si noti che l'uso della parola *cifra* non si è introdotto senza lasciare tracce osservabili del suo significato primitivo di *as-sifr*. Così in inglese la parola *cipher* indica

arabe nella cristianità e fu per alcuni secoli la fonte principalissima, se non unica, dalla quale gli autori presero il materiale per le loro opere di aritmetica e di algebra. In essa si trovano i più perfetti metodi noti a quel tempo pel calcolo degl' interi e delle frazioni; vi sono spiegate le estrazioni delle radici quadrata e cubica e la teoria delle grandezze incommensurabili; evvi la teoria completa delle equazioni di 1° e di 2° grado; le equazioni di 2° grado sono risolute geometricamente secondo il metodo arabo che abbiamo trovato nell'Algebra di Alhovarezmi; e Leonardo, come lo scrittore arabo, non riconosce le soluzioni negative dell'equazione. Il libro contiene un grandissimo numero di problemi, risoluti coi metodi di *semplice* e *doppia posizione* ed anche mediante l'algebra.

246. Vogliamo qui riportare passo per passo la soluzione di uno di essi per far conoscere il metodo di Leonardo, introducendo solo per brevità i moderni segni. Il problema è il seguente: Dividere il numero 10 in due parti tali, che dividendo l'una per l'altra ed alla somma dei quozienti aggiungendo 10 e moltiplicando poi il tutto per la parte maggiore, si abbia per risultato finale 114. Ecco la soluzione del matematico di Pisa. Denotando col segmento a la parte maggiore di 10, *quam*, dice Leo-

---

lo zero, mentre si usa di preferenza la parola *figure* per indicare una cifra. In portoghese la parola *cifra* ha conservato il senso di zero a lato di quello di cifra. Inoltre in alcuni trattati di matematica dei secoli passati la parola *cifra* era anche usata per indicare lo *zero*. Così il NEMORARIO, m. nel 1237, nel suo *Algorithmus demonstratus* chiama lo 0 *cifra, sive circulus, sive figura nihili;* N. CHUQUET in *Le triparty en la science des nombres* (1484) denomina lo 0 *chiffre, nulle, figure de nulle valeur;* il TARTAGLIA (1500-1557) allo 0 dà i nomi di *nitecchia, circolo, cifra, zerro, nulla;* l'HÉRIGONE nel suo *Cursus mathematicus* (1634) scrive: « Decima figura et ultima 0... dicitur *cifra* vel *zero* », e *cifra* chiama altresì lo *zero* B. CAVALIERI (1598-1647) nella sua *Trigonometria* (1643) ed anche l'Eulero (1707-1783) nei suoi *Opuscula analytica* (1783).

nardo, *pono rem,* e ponendo i segmenti adiacenti $bc=10$, $cd=\frac{10-a}{a}$, $de=\frac{a}{10-a}$, si avrà, per le date condizioni la relazione $a.be=114$, ossia $a.bc+a.cd+a.de=$ $=114$; e togliendo da ambo i membri $a.bc=10a$, si avrà $a.cd+a.de=114-10a$, ossia $10-a+a.de=$ $114-10a$, da cui $a.de=104-9a$, od ancora $\frac{a^2}{10-a}=$ $=104-9a$, ossia $a^2=1040-194a+9a^2$. *Restaura res diminutas*, aggiungi cioè $194a$ ad ambo i membri, poichè nel secondo membro si trova il termine $-194a$, *et extrahe unum censum ab utroque parte,* cioè togli da ambo i membri a^2, e si avrà $8a^2+1040=194a$; dividendo per 8, si ottiene finalmente $a^2+130=\frac{97}{4}a$, epperò; secondo la regola,

$$a=\frac{97}{8}-\sqrt{\left(\frac{97}{8}\right)^2-130}=8.$$

Leonardo non prende qui il radicale col segno +, pur sapendo che l' equazione $x^2+q=px$ ammette due soluzioni positive (1), poichè ne verrebbe per a un valore maggiore di 10 e quindi per $10-a$ un valore negativo.

In quest' altro problema si potrà ammirare l'arte di Leonardo nella scelta dell' incognità. Dividere 10 in due parti tali che sottraendo dalla maggiore il doppio della sua radice, ed aggiungendo alla minore anche il doppio della sua radice, si abbiano uguali risultati.

Indicando Leonardo con $5+x$ e $5-x$ le due par-

(1) In riguardo a questa equazione, Leonardo osserva che se è $\frac{1}{4}p^2<q$, l'equazione è assurda; se $\frac{1}{4}p^2=q$, sarà $x=\frac{1}{2}p$, e se infine è $\frac{1}{4}p^2>q$, sarà $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$. Ed aggiunge: *Et sic si non solvetur quaestio cum diminutione*, cioè prendendo il segno — del radicale, *solvetur cum additione.*

ti, ottiene l' equazione

$$5 + x - 2\sqrt{5 + x} = 5 - x + 2\sqrt{5 - x},$$

da cui $x = \sqrt{5 + x} + \sqrt{5 - x}$, dalla quale, quadrando due volte e riducendo, ricava subito $x^4 = 16x^2$, epperò $x = 4$. Se avesse invece indicato con x la parte maggiore, avrebbe ottenuto un'equazione completa di 4° grado.

247. Il *Liber Abaci* contiene ancora un problema d'interesse storico, poichè con alcune variazioni è stato dato da Ahmes 3000 anni prima: « 7 vecchie vanno a Roma; ciascuna conduce 7 mule; ciascuna mula porta 7 sacchi; ciascun sacco contiene 7 pani; in ciascun pane si trovano 7 coltelli e ciascun coltello è posto in 7 guaine. Qual'è il numero di tutte queste cose? — Risp. 137 256 ». In qualche problema vi è anche un cenno, lontano se si vuole, delle quantità negative, considerate come rappresentanti debito. Ma merito principalissimo di quest'opera è l' applicazione che vi si fa dell' algebra alla geometria; in essa si trova il primo esempio, e l'origine nella matematica in Europa, dell'introduzione dell' algebra nelle dimostrazioni e nelle speculazioni geometriche. Questa lega delle due scienze, che erano tanto lontane l'una dall'altra presso i Greci, forma il carattere precipuo dell' opera del Fibonacci, ove non solamente si trova messa in pratica, ma è espressa formalmente come insita alla natura delle due scienze che debbono prestarsi mutui ausilî. Infatti egli nella prefazione della sua opera dice: « Et quia Arithmetica et « Geometriae scientia sunt connexae, et suffragatoriae « sibi ad invicem, non potest de numero plena tradi « doctrina nisi inserantur geometrica quaedam, vel ad « Geometriam spectantia », ed aggiunge che sovente le regole e le operazioni dell'algebra risultano evidenti da figure e considerazioni geometriche. Annunzia in seguito che tratterà con maggiore estensione ciò che con-

cerne la Geometria in un' opera di Geometria pratica da lui composta.

248. Quest'opera, divisa in 8 capitoli, apparve nel 1220 col titolo *Pratica Geometriae*, ove l'Autore raccolse quanto sapevasi sul calcolo delle aree delle figure piane rettilinee e dei poliedri e sulla misura del cerchio, della sfera e del cilindro, servendosi degli scritti di Euclide e di alcuni altri autori greci che a lui erano noti o dai manoscritti arabi o dalle traduzioni di Gherardo di Cremona e di Platone Tiburtino. Riguardo alla Trigonometria, che certamente Leonardo conosceva dalle opere di Tolomeo e degli autori arabi, ne dà soltanto gli elementi, poichè, secondo l'antico costume, questo ramo della matematica faceva parte dell'astronomia. In quest'opera si trova un'elegante dimostrazione geometrica della formola di Erone per l'area del triangolo in funzione dei lati, ed è trattata pure la divisione delle figure in parti aventi un dato rapporto, secondo l'opera d'Euclide *De divisionibus*, dagli Arabi migliorata ed ampliata.

In essa poi non solo si ammira il rigore euclideo, ma l'eleganza e talvolta anche l'originalità con cui è svolto il ricco materiale contenutovi. Nel determinare p. es. il valore del perimetro del poligono regolare di 96 lati inscritto o circoscritto in un cerchio, seguendo una via diversa e più breve di quella di Archimede, Leonardo trova i due limiti $1440 : (458 + {}^1/_5) = 3{,}143$ e $1440 : (458 + {}^4/_9) = 3{,}141$, donde segue il valore medio eguale a $1440 : (458 + {}^1/_3) = 3{,}1418$.

249. Dopo la publicazione del *Liber Abaci*, Leonardo si acquistò grande fama tanto che l'imperatore Federico II di Hohenstaufen, protettore delle scienze e delle lettere, nel 1225 si fermò appositamente a Pisa per conoscerlo. Presentato Leonardo all'Imperatore dall'astronomo Domenico, il notaio imperiale Giovanni di Palermo ed il filosofo Teodoro, ch'era al seguito dell'Im-

peratore, gli proposero diversi problemi, che Leonardo prontamente risolvè con grandissima abilità. Il primo problema era di trovare un numero x tale che $x^2 + 5$ e $x^2 - 5$ fossero due quadrati. La risposta è $x = 3\frac{5}{12}$, poichè

$$\left(3\frac{5}{12}\right)^2 + 5 = \left(4\frac{1}{12}\right)^2, \quad \left(3\frac{5}{12}\right)^2 - 5 = \left(2\frac{7}{12}\right)^2.$$

La geniale soluzione di questo problema è data nel suo *Liber quadratorum*, opera di cui una copia è stata dall'autore inviata allo stesso Imperatore. Il problema proposto non era originale di Giovanni, poichè gli Arabi avevano già risoluto problemi analoghi; e se la soluzione di Leonardo in parte è stata presa dagli autori maomettani, il metodo da lui tenuto per la formazione dei numeri quadrati mediante la somma di numeri dispari è tutto proprio, come originali sono tutte le dimostrazioni che vi si trovano. Questo *Liber quadratorum* è il monumento aritmologico più prezioso che ci abbia trasmesso il Medio-evo, ed in esso l'Autore risolve alcune equazioni indeterminate di 2° grado e dimostra mediante metodi grafici molte proprietà generali dei numeri quadrati.

Quest'opera si credeva da molto tempo perduta, quando il Boncompagni ne scoprì una copia in un Codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano, e la pubblicò, insieme con lo scritto di cui ora parleremo, primieramente nel 1854 col titolo *Tre scritti inediti di Leonardo Pisano* e poi in una seconda edizione nel 1856 col titolo *Opuscoli di Leonardo Pisano.*

250. Il secondo problema proposto a Leonardo nella sopradetta occasione è stato quello di risolvere l'equazione $x^3 + 2x^2 + 10\,x = 20$. Per lo innanzi neppure nelle opere degli Arabi si trova la soluzione algebrica di un'equazione di 3° grado. Con considerazioni geometriche rigorosissime, delle quali il Woepcke ha dato la tradu-

zione analitica nel *Journal de mathématique* del Liouville (volume XIX, 1854), Leonardo dimostra che la radice di quest'equazione non è nè un intero, nè una frazione, nè alcuna delle quantità composte di radicali del 2° grado, che trovansi nel X libro degli *Elementi* di Euclide. Non contento però di ciò, egli dà un valore molto approssimato della richiesta radice. Questo problema con la relativa soluzione trovasi in uno scritto intitolato *Flos*, nel quale inoltre si legge la soluzione del seguente terzo problema proposto all'Autore da Giovanni di Palermo:

« Tre uomini posseggono in comune una somma ignota t di danaro; la parte del primo è $^1/_2\ t$, quella del secondo $^1/_3\ t$ e quella del terzo quindi $^1/_6\ t$. Desiderosi di deporre la somma in luogo sicuro, ciascuno ne prende a caso una certa quantità; il primo ne prende x, e deposita $^1/_2\ x$; il secondo y e deposita $^1/_3\ y$; il terzo z e deposita $^1/_6\ z$. Ciascuno deve ricevere dell'intera somma depositata il terzo per riavere la parte spettantegli. Trovare x, y, z ». Leonardo mostra che il problema è indeterminato, ed assumendo 7 per ciò che ciascuno ritira dal deposito, trova $t = 47$, $x = 33$, $y = 13$, $z = 1$.

251. Nei suoi scritti Leonardo ci offre molti esempi di un'analisi *speciosa* che si può chiamare *lineare*, poichè nei problemi che richieggono un lungo giro di calcolo, egli rappresenta la quantità cercata, *ut ad oculum clarius videatur*, con un segmento rettilineo indicato con una lettera minuscola; e similmente, come abbiamo visto nella soluzione di un problema innanzi riportata, con segmenti rappresenta i numeri dati, e ragionando su tali rappresentazioni lineari, e calcolando, riduce l'equazione alla forma tipica, detta *capitolo*, e ne ricava la soluzione. Una tale analisi, come bene osserva il Cossali, se resta nei pregi e nei vantaggi inferiore all'analisi speciosa del Vieta, riesce certamente superiore ad una semplice analisi numerica.

252. Dopo Leonardo sarebbe da supporre che le

scienze degli Arabi trasportate sul suolo cristiano avrebbero dovuto crescere prospere e vigorose; ma ciò non avvenne. Morto Federico II nel 1254 seguì in Germania un periodo di grande confusione. Successero le continue guerre degl'imperatori coi papi, delle quali sventuratamente era teatro l'Italia, inoltre afflitta delle accanite lotte fra Guelfi e Ghibellini; la Francia e l'Inghilterra furono travagliate dalla guerra dei cento anni (1338-1453) e nell'Inghilterra accaddero altresì le guerre delle Rose; quindi l'energia dei popoli fu totalmente assorbita dalle guerre e le scienze rimasero stazionarie. Inoltre al progresso delle scienze non solo furono di ostacolo le dette guerre, ma anche grandemente la scolastica. I filosofi di quei tempi disputavano sopra futili questioni metafisiche o teologiche; con grandissimo interesse discutevano intorno a frivole questioni, come quanti angeli possono stare sulla punta di un ago. Fra gli scritti di matematica del Medio-evo le opere di Leonardo appaiono affatto isolate, poichè durante questo periodo pur essendovi stati molti scrittori di matematica, i loro lavori scientifici erano grandemente viziati nel metodo. Quantunque essi possedevano gli *Elementi* di Euclide, si può dire che la natura di una dimostrazione matematica era stata così poco compresa che nell' intera letteratura di quell' epoca, fatta eccezione delle opere del Fibonacci, non si può trovare una sola dimostrazione che sia veramente rigorosa.

Il solo notevole progresso fu fatto nella semplificazione delle operazioni numeriche e nell' applicazione più vasta di esse; ed in ciò si distinsero gl' Italiani in generale ed in particolare i Toscani o meglio i Fiorentini, la cui città era il centro delle lettere e delle arti nei secoli XIII e XIV. A questi di devono le prime nozioni dell' Aritmetica commerciale; furono essi che introdussero nei libri di Aritmetica sotto distinti capitoli le questioni delle regole del tre semplice e compo-

stà, del guadagno e della perdita, di società, d'interesse semplice e composto, di sconto, ecc.

253. Quasi contemporaneo di Leonardo, visse in Germania il monaco domenicano GIORDANO NEMORARIO, che, eletto generale di questo ordine nel 1222, morì nel 1236. Il prof. Curtze, che con grande amore studiò le opere di questo matematico del secolo XIII, gli attribuisce le seguenti opere: 1°. *Geometria vel de triangulis, libri IV*; 2° *De isoperimetris*; 3° *Arithmetica, decem libris demonstrata*, che è un trattato delle proprietà dei numeri, come quello di Nicomaco e quello di Boezio; 4° *Algorithmus demonstratus*; 5° *De numeris datis*; 6° *Tractatus de sphaera.*

254. Degno di nota per le conoscenze geometriche di Nemorario è specialmente l' opera *De triangulis*, divisa in 4 libri. Nel primo libro con le definizioni si trovano alcuni concetti fondamentali che portano l'impronta della scolastica; così p. es. « *Continuitas est indiscrecio terminorum cum terminandi potencia* » *(continuità è l'attitudine di non essere confinato con la possibilità di essere limitato).* Nella proposizione 12ª del terzo libro è introdotto un concetto ed un nome nuovo, quello dell'*angulus contingencie* (1), per indicare l'angolo che la tangente forma con un arco di cerchio. Euclide avea già dimostrato (lib. III, prop. 26ª) che quest' angolo è minore di qualunque angolo rettilineo dato. Nel quarto libro, che è forse il più importante, vi si legge il problema di trovare un quadrato equivalente ad un cerchio, e la dimostrazione, condotta a modo dialettico, non trova riscontro nel ricco materiale sulla quadratura del cerchio, lasciatoci dagli Arabi e tradotto da Gherardo Cremonese. Vi si risolvono infine i problemi della trisezione dell'angolo e della duplicazione del cubo.

L' *Algorithmus demostratus* contiene regole pratiche

(1) Così sta scritto nell'opera *De triangulis*.

per le 4 operazioni fondamentali, e i numerali arabi sono generalmente usati. È diviso in 19 libri e vi sono trattate le proprietà dei numeri, dei numeri primi, dei numeri perfetti, dei numeri poligonali, ecc. e le proprietà dei rapporti delle potenze e delle progressioni.

Il *De numeris datis* in 4 libri contiene poi la soluzione di molti problemi, alcuni dei quali conducono ad equazioni di 1° o di 2° grado con una o più incognite.

Quantunque Nemorario dimostri le proposizioni generali facendo sempre uso di numeri particolari, pure nelle due ultime opere si incontrano alcune proposizioni ove sono usate le lettere per denotare quantità note o ignote od ancora per dimostrare regole di aritmetica o di algebra. Ecco un esempio ricavato dal *De numeris datis* (lib. I, prop. 3), che riportiamo per intero avvertendo che Nemorario, come Diofanto, indica la somma di due numeri, scrivendoli l' uno di seguito all'altro.

« *Dato numero per duo diviso si, quod ex ductu unius in alterum producitur, datum fuerit, et utrumque eorum datum esse necesse est* (trovare cioè due numeri conoscendone la somma ed il prodotto).

« Sit numerus datus *abc* divisus in *ab* (1) et *c*, atque ex *ab* in *c* fiat *d* datus, itemque ex *abc* in se fiat *e*. Sumatur itaque quadruplum *d*, qui fit *f*, quo dempto de *e* remaneat *g*, et ipse erit quadrutum differentiae *ab* ad *c*. Extrahatur ergo radix ex *g*, et sit *h*, eritque *h* differentia *ab* ad *c*, cumque sit *h* datum, erit *c*, et *ab* datum ».

Esprimiamo ciò nell'odierno linguaggio, sostituendo x all'incognita $a + b$ dell'Autore per commodità. Siano adunque i due numeri cercati x e c, di cui è nota la somma, il cui quadrato noto l'autore pone eguale ad e : è

---

(1) Si noti che l'autore assume qui per un'incognita la somma $a + b$.

noto poi il prodotto $xc = d$. Inoltre se è $4d = f$, sarà $e - f = (x - c)^2$; pongasi $e - f = g$ e $\sqrt{g} = h$. Conoscendo quindi la somma $x + c$ e la differenza $x - c = h$ dei due numeri, facilmente si ricavano i due numeri cercati.

L'autore applica poi questo procedimento supposto che la somma sia 10 ed il prodotto 21, e trova i due numeri 3 e 7.

255. Nel trattato della Sfera di Nemorario si trova dimostrata per la prima volta in tutta la sua generalità la bella proprietà della proiezione stereografica (1), che è il fondamento della costruzione del Planisfero, che cioè *ogni cerchio si proietta in un cerchio*, poichè Tolomeo l'aveva dimostrato per posizioni particolari del cerchio della sfera messo in prospettiva. Inoltre Tolomeo faceva la proiezione sul piano dell'equatore, supposto che l'occhio stia al polo, mentre Nemorario l'ha fatta sul piano tangente alla sfera condotto dal secondo polo.

256. Dobbiamo ancora ricordare pochi altri matematici di questo secolo XIII. E dobbiamo primieramente nominare GIOVANNI D'HALIFAX O DI HOLYWOOD, il cui nome è forse meglio noto sotto la voce latina di SACROBOSCO. Nacque (nel 1200 ?) nell'Yorkshire e fu educato ad Oxford, ma presovi il grado di maestro, andò ad insegnare matematica ed astronomia a Parigi, ove morì nel 1256. Scrisse un *Tractatus de arte numerandi*, che tratta del calcolo con numeri interi; ma la sua opera principale è un compendio di astronomia sferica dal titolo *De sphaera mundi*, che nel secolo XVI fu commentato dal Clavius (1537-1612) e fu per 400 anni il libro di testo per l'insegnamento dell'astronomia nelle scuole.

257. ALBERTO IL GRANDE, monaco domenicano,

(1) La denominazione di proiezione *stereografica* con la quale si denomina la proiezione usata da Tolomeo nel suo *Planisfero*, s'incontra la prima volta nell'*Ottica* di AIGUILON (Parigi, 1613).

così nomato o perchè il suo nome proprio, che è Grott, significava nel linguaggio del tempo *Grande*, o per la sua fama di dotto teologo ed abile chimico, fisico e matematico. Nato nel 1193 o nel 1205, morì a Köln nel 1280, dopo di avere scritto sull' aritmetica, sulla geometria, sull' astronomia e sulla musica, opere che a noi non son pervenute. Egli aveva inoltre un'estesa conoscenza della cultura e delle opere degli Arabi ed era ancora un abilissimo meccanico.

258. Uno dei più potenti geni del Medio-Evo fu senza dubbio RUGGERO BACONE, monaco francescano, nato ad Ilchester nel Somersetshire nel 1214, morto ad Oxford nel 1294. Professore di matematica e di astronomia ad Oxford, occupò un posto eminente fra' promotori della rinascenza generale delle lettere e delle scienze; ed in particolare contribuì ai progressi della matematica, mostrando in molti delle sue opere il posto che la scienza esatta deve avere nell'insieme delle conoscenze umane e gli ausili che essa presta in tutte le ricerche scientifiche, delle quali è il fondamento. Le sue conoscenze in astronomia gli fecero riconoscere gli errori del calendario del tempo, del quale concepì la riforma. Nel calendario da lui calcolato si riscontra l'uso delle cifre arabe simile a quelle adoperate da Sacrobosco. A lui l'ottica deve non solo dotte osservazioni e reali scoperte teoriche ma molti strumenti utilissimi.

259. VINCENZO DI BEAUVAIS, morto nel 1265, anch'egli monaco domenicano, scrisse un'opera dal titolo *Speculum mundi*, che ha ricevuto il nome di *Enciclopedia del secolo XIII*. Essa non è punto originale, non contenendo che estratti delle opere di Euclide, di Aristotele, di Vitruvio, di Boezio, di Cassiodoro, d'Isidoro di Siviglia e di diversi autori arabi. Vi si trovano nozioni di aritmetica, di geometria, di prospettiva, di astronomia, di musica e di metrica, scienza dei pesi e delle misure; non vi si fa cenno dell' algebra; è esposto chiaramente

il nostro sistema di numerazione con lo zero sotto il titolo di *Algorismus*.

260. Vogliamo anche citare GUGLIELMO DI MÖRBECKE, che nel 1278 fu nominato Arcivescovo di Corinto, poichè da una sua traduzione conosciamo l'opera di Archimede *De iis, quae in humido vehuntur*.

261. Verso la fine del secolo XIII visse un altro monaco, VITELLIONE, probabilmente della Turingia, il quale scrisse un dotto trattato di Ottica in 4 libri. Tutto il 1° libro è dedicato alla geometria.

262. In questo medesimo secolo vissero in Italia GUGLIELMO DE LUNIS, che tradusse dall' arabo in italiano un trattato di algebra, e BARTOLOMEO DI PARMA, che nel 1297 insegnava matematica a Bologna. Questi era uno dei più dotti uomini del suo tempo e scrisse di geometria e di astronomia.

263. Ma prima di chiudere questo rapido cenno dei matematici del secolo XIII, dobbiamo soffermarci a GIOVANNI CAMPANO di Novara, che tradusse da un testo arabo gli *Elementi* di Euclide ed i due libri XIV e XV, traduzione che divulgò in Europa la conoscenza della geometria. Stampata la prima volta nel 1482, ebbe in seguito numerose edizioni, ed anche dopo la rinascenza delle scienze per lungo tempo fu tenuta in gran conto. Nei commenti aggiunti dal traduttore si trova dopo la proposizione 32ª del 1° libro il teorema sulla somma degli angoli di un pentagono stellato, il quale nel secolo successivo suggerì a Bradwardin l'idea della teoria dei poligoni stellati. Alla fine del 4° libro vi sono due proposizioni di Campano, l'una sulla trisezione dell'angolo, l'altra sulla costruzione dell'ennagono regolare inscritto nel cerchio. Il secondo problema dipende dal primo e la soluzione data da Campano è la seguente : Descritta una circonferenza di centro il vertice O (Fig. 49)

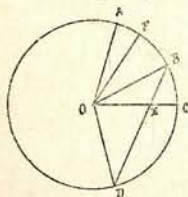



Fig. 49.

dell'angolo dato AOB, si tracci il raggio OC perpendicolare ad OA e per B si costruisca la corda BD tale che il segmento ED compreso fra OC e la circonferenza sia eguale al raggio stesso. Costruendo da O la OF parallela a BD, sarà l'angolo AOF la terza parte dell'angolo AOB. Campano non dice il modo come si costruisce la corda BD; ma si vede che essa può tracciarsi mediante una concoide di Nicomaco.

Secolo XIV.

264. Nel secolo XIV si studiarono con sommo amore le opere dei precedenti scrittori e si fecero altresì i primi tentativi per applicare le teorie svoltevi; si seguitò a spigolare nelle opere degli Arabi e a farne delle traduzioni. Quantunque non vi sia stata alcuna spiccata individualità nel campo matematico, pure si può asserire che le menti si prepararono alla lettura delle opere originali dei Greci ed al rapido movimento generale, che iniziò, nel secolo successivo, il rinnovellamento delle scienze.

265. L'opera più importante, se non forse l'unica, apparsa in questo secolo, che meriti veramente di essere menzionata, è la *Geometria speculativa* di TOMMASO BRADWARDIN, arcivescovo di Cantorbery, n. ad Hardfield presso Chichester nel 1290, m. a Lambeth nel 1349. Essa si compone di 4 parti. Nella prima dopo di aver considerati i poligoni regolari convessi, che chiama *figure semplici,* consacra un capitolo allo studio dei poligoni stellati da lui chiamati *figure ad angoli egredienti.* Definisce e classifica questi poligoni nel seguente modo: prolungando due in due i lati di un poligono, primo e terzo, secondo e quarto, terzo e quinto, ecc., fino al loro punto d'incontro, si ottiene un poligono ad angoli egredienti di 1°, 2°, 3°, ecc. ordine, secondo che il poligono primitivo è semplice (convesso) ovvero di 1°, 2°, ecc. ordine.

Osservando poi che il pentagono è la prima figura ad angoli egredienti del 1° ordine e l'ettagono la prima del 2° ordine, e che quello nasce dal pentagono semplice, che è la terza delle figure semplici e questo dall' ettagono di 1° ordine, che è la terza delle figure di 1° ordine, per analogia enuncia questo principio generale: *la prima figura d'un ordine è formata dal prolungamento dei lati della terza figura dell'ordine antecedente*; il che però è vero se fra' poligoni stellati si considerino quelli a perimetro composto, come fa il Bradwardin che comprende anche l'esagono stellato. Dopo di aver provato che nel pentagono di 1° ordine la somma degli angoli egredienti è eguale a due retti, dimostra che, aumentando di uno il numero dei lati di un poligono di 1° ordine, la somma dei suoi angoli aumenta, come nei poligoni semplici, di due retti; questo è vero anche per i poligoni di un qualsiasi ordine, includendovi i poligoni a perimetro continuo. Questa proprietà è intuìta dall'autore, il quale però confessa di non poterla dimostrare; enuncia altresì, senza dimostrare, che nella prima figura di ciascun ordine la somma degli angoli è sempre eguale a due retti.

Nella 2ª parte di quest'opera si trova la teoria delle figure isoperimetre coi seguenti teoremi: 1° Fra' poligoni isoperimetri ha l' area massima quello che ha il maggior numero di angoli; 2° Fra' poligoni isoperimetri di un egual numero di vertici ha l'area massima l'equiangolo; 3° Fra' poligoni isoperimetri ed equiangoli, i quali hanno uno stesso numero di vertici, ha l'area massima l'equilatero; 4° Fra tutte le figure isoperimetre il cerchio ha l'area massima. L' Autore aggiunge che la sfera gode la medesima proprietà fra' solidi.

Del medesimo autore si hanno ancora un *Tractatus de proportionibus* ed un'*Arithmetica speculativa*.

266. Il Bradwardin ebbe una grande celebrità non solo come matematico, ma altresì come filosofo, teologo e conoscitore della letteratura araba. Fu il primo in

Europa ad introdurre nei calcoli trigonometrici l'uso della tangente e della cotangente coi nomi di *umbra retta* ed *umbra versa*.

267. A Parigi, che fu il centro della cultura scientifica nei secoli XIII e XIV, insegnava matematica verso il 1322 GIOVANNI DI LINERIIS, il quale calcolò le tavole Alfonsine per il meridiano di Parigi ed una *Tabula sinus*.

268. In quell'Università troviamo rettore nel 1326-27 PIETRO DI DACIA, matematico danese, che scrisse fra le altre opere un *Commentum super Algorismum prosaicum Johannis de Sacro Bosco*.

269. Ivi verso il 1360 spiegava la sua attività nell'insegnamento NICOLA ORESME, che può collocarsi a fianco del Bradwardin. Nato a Caen nella Normandia verso il 1323, si acquistò la protezione di Carlo V, che lo nominò vescovo di Lisieux, ove morì nel 1382. Nel suo *Algorithmus proportionum* si riscontra la prima idea del calcolo delle potenze con esponenti frazionari: la sua notazione era completamente diversa dall'odierna. Egli p. es. per indicare $4^{1\frac{1}{2}} (= 8)$ scriveva:

$$\boxed{1^p \frac{1}{2}}\, 4, \text{ ovvero } \boxed{\frac{p.1}{1.2}}\, 4;$$

come pure scriveva:

$$\boxed{\frac{1\ p}{2.27}} \text{ per } 27^{\frac{1}{2}}, \quad \boxed{\frac{1.p}{3.3}} \text{ per } 3^{\frac{1}{3}}.$$

Egli scrisse inoltre le seguenti opere: *Tractatus proportionum*; *Tractatus de latitudinibus formarum*; *Tractatus de uniformitate et difformitate intensionum*, nelle quali trovansi adoperate certe linee, *latitudo et longitudo*, che sono una specie di coordinate rettangolari; scrisse ancora un trattato della sfera e tradusse l'opera *De Coelo et mundo* di Aristotele.

270. Analoga pel contenuto all'opera *De latitudinibus formarum* di Oresme è l'omonima di ALBERTO DI SASSONIA, dottore in teologia, che insegnò filosofia e matematica a Parigi dal 1350 al 1365; nel 1365 fu il primo rettore dell'Università di Vienna, nominato dal duca Rodolfo IV di Austria, e poi dal 1366 al 1390, anno della sua morte, vescovo di Halberstadt. Di lui si hanno altresì: *Tractatus proportionum*; *De maximo et minimo*; *De quadratura circuli*; *De proportione dyametri quadrati ad costam ejusdem*. Commentò ancora la Fisica di Aristotele.

271. Nel secolo XIV in Italia sommi poeti, letterati, artisti lasciarono l'impronta del loro genio, ma nella nostra storia non si può citare alcun matematico di valore, e la grande opera di Leonardo Pisano rimase quasi del tutto ignorata. Possiamo soltanto citare PAOLO DAGOMARI, nato a Prato verso il 1281, morto a Firenze nel 1366 o 1374, matematico ed astronomo, il quale per la sua abilità nel calcolo era soprannominato *dall' Abaco*; egli scrisse fra le altre opere matematiche il primo *Almanacco* italiano detto *Taccuino*; è però più noto per le sue *Regoluzze*, che trattano di calcoli di aritmetica.

Possiamo ancora citare RAFFAELE CANACCI di Firenze che verso il 1380 scrisse in italiano un trattato di Algebra; ANTONIO BILIOTTI di Firenze, anch'egli nominato *dall'Abaco*, che nel 1383 insegnò matematica a Bologna; GIOVANNI DANTI di Arezzo, che scrisse una geometria attinta a fonti arabe. Ma più benemerito dei precedenti fu BIAGIO DA PARMA, il cui nome era propriamente PELACANI, morto nel 1416, che insegnò a Parigi, Pavia, Bologna, Padova, Parma: si occupò di statica e di prospettiva e scrisse un commento al trattato *De latitudinibus formarum* di Oresme, stampato a Padova nel 1482.

Secolo XV.

272. Da quanto fin qui abbiamo esposto si vede che le conoscenze matematiche in Europa nel Medio-Evo dal VII secolo al XIV sono andate lentamente aumentando: dalle poche e superficiali conoscenze ricavate dagli scritti di Boezio, Cassiodoro ed Isidoro di Siviglia perveniamo alle dotte opere che nel secolo XII furono tradotte dall'arabo in latino; ed appaiono i lavori originali di Leonardo Fibonacci, Giordano Nemorario e Tommaso Bradwardin, per citare i sommi che vissero in questo periodo in Italia, in Germania e nell'Inghilterra. Ma nel secolo XV, che segna in Europa l'inizio di una nuova èra, quella della rinascenza non solo delle lettere e delle arti, ma anche delle scienze, la matematica ricevette un nuovo e fecondo impulso che rapidamente preparò i progressi di questa scienza nel secolo successivo. Questo impulso era stato provocato dalla conoscenza delle opere greche, che per la prima volta in Occidente si studiarono nella loro lingua originale e si tradussero, facendosi così conoscere in tutta la loro purezza le opere dei sommi geometri dell'antichità. Inoltre alla geometria dei Greci si unì in questo secolo il possesso completo dell'algebra arabo-indiana; e la lega fra la geometria e l'algebra, già segnata da Leonardo, divenne un fatto compiuto, come è attestato dalle opere originali che apparvero in questo periodo, nelle quali si hanno le prime applicazioni delle conoscenze ricavate e dai Greci e dagli Arabi. Con l'invenzione della stampa, verso la metà del secolo XV, venne finalmente rotto l'incantesimo che aveva tenuto vincolata l'Europa nelle tenebre e nell'oscurantismo.

273. La scuola di Biagio da Parma in Padova, benchè poco frequentata pel carattere ruvido del maestro, produsse tuttavia buoni allievi; e primo fra questi fu Prosdocimo de' Beldomandi di nobile famiglia padovana.

Studiò in quell'Università dal 1400 al 1402, nel 1420 fece parte di quel Sacro Collegio di arti e medicine, e dal 1422 fino alla sua morte, nel 1428, insegnò in quella medesima Università matematica ed astronomia. Ingegno versatile, scrisse di matematica, astronomia e musica: il suo *Algorismus de integris* contiene anche un frammento di geometria; commentò la *Sferica* di Sacrobosco, ma questo commento, scritto nel 1418, ci addimostra l'ignoranza del greco in quel tempo, poichè vi si legge che *isoperimetro* vale figura circoscritta ad un'altra, da *ysos* = *figura*, *peri* = *intorno*, *metros* = *misura*.

274. Ma già il desiderio di leggere le opere greche e tradurle dall'originale senza ricorrere al tramite degli Arabi, si era fatto probabilmente sentire, epperò la lingua greca s'incominciava a studiare con vivissimo amore; e verso la fine della prima metà del secolo XV si tradussero dal greco scritti di poesia, di filosofia, di astronomia e di matematica. Giacobbe di Cremona, noto più comunemente col nome di Jacopo da S. Cassiano, insegnante prima a Mantova e poi a Roma, tradusse per incarico di Nicola V le opere di Archimede da un manoscritto del Vaticano; Giorgio di Trebisonda, nato a Creta nel 1396, ma educato e vissuto in Italia, ove morì nel 1486, tradusse l'*Almagesto* di Tolomeo col commento di Teone; e più tardi ancora Giambattista Memmo, latinamente chiamato Memmius, nobile veneziano, versatissimo nel greco, tradusse 4 libri delle Sezioni coniche di Apollonio, quantunque ignaro di matematica.

275. Fra gli scrittori di matematica della prima metà di questo secolo devesi ricordare il celebre pittore Leon Battista Alberti, nato a Genova nel 1404, morto a Roma nel 1472. Nel 1434 inventò uno strumento, da lui detto *velo*, atto ad ingrandire od a ridurre un disegno. Nella sua opera *Della Statua*, determinò matematicamente i rapporti delle varie parti del

corpo umano. Scrisse ancora *Tre libri della pittura*; *Elementi di pittura*; *Prospettiva*, opere nelle quali si tratta di geometria. Si hanno ancora di lui uno scritto dal titolo *Ludi matematici* ed un altro *Dell'arte di edificare.*

276. Uno degli scrittori che maggiormente contribuirono a risollevare le scienze, fu il cardinale NICOLA DI CUSA, nato nel 1401 a Cuss, villaggio sulla Mosa, per l'importanza ch'egli in esse riconobbe, e per averle divulgate mediante tutti i suoi scritti, compresi quei di teologia, seguendo in ciò l'esempio dell'arcivescovo Bradwardin. Egli rimase celebre nella storia per aver adottati i principî della filosofia platonica, e sopratutto per aver risuscitato, per il primo, il sistema pitagorico del movimento della Terra intorno al Sole, precorrendo così Copernico e Galilei.

Rivolse la sua attenzione al cerchio e ne determinò il diametro in funzione del perimetro e del numero dei lati di un poligono regolare inscritto; il suo calcolo è compendiato nella formola $d = \frac{p}{2n \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{n}}$, ove d è il diametro del cerchio, p il perimetro ed n il numero dei lati di un poligono regolare inscritto. Si occupò pure della quadratura del cerchio; ma il migliore dei suoi scritti è *De mathematica perfectione*, ove egli si addimostra scrittore originale. Vi determina la lunghezza di un arco, essendone data la corda, la perpendicolare nel suo punto medio ed il raggio e giunge ad un risultato che oggi si traduce nella formola $\alpha = \frac{3 \operatorname{sen}\alpha}{2 + \cos\alpha}$. V' insegna ancora a costruire una squadra, il cui cateto maggiore eguagli in lunghezza la semicirconferenza descritta sul cateto minore, e facendo uso di questa squadra rettifica una qualsiasi circonferenza nel seguente modo: tracciati nella circonferenza due diametri ortogonali, ed adagiata la squadra in modo che il

cateto minore coincida in direzione con un diametro, il vertice dell'angolo acuto con uno estremo di questo medesimo diametro, l' altro cateto si disporrà parallelamente al secondo diametro. Prolungando questo secondo diametro fino all' incontro con la direzione dell' ipotenusa, si formerà un triangolo rettangolo, il cui cateto maggiore è eguale alla data semicirconferenza.

Il Cardinale Di Cusa morì a Todi nel 1464.

277. Fra' grandi riformatori della scienza è da annoverarsi GIORGIO DI PEURBACH, così chiamato dal suo luogo natio Peuerbach in Baviera, ove nacque nel 1423. Studiò matematica a Roma, Ferrara, Bologna, Padova, ed insegnò matematica ed astronomia nell'Università di Vienna, ove morì nel fiore dei suoi anni il 1461. Perfezionò il calcolo dei numeri interi nei suoi *Elementa arithmetices* e nel suo *Algorithmus de integris*; calcolò una tavola dei seni di 10′ in 10′, prendendo il raggio eguale a 60000, la cui introduzione è stata pubblicata a Norimberga nel 1541 col titolo *Tractatus Georgii Purbachii super propositiones Ptolomaei de sinubus et arcubus* insieme con una tavola di Regiomontano.

Ma egli è sopratutto noto come astronomo e come autore dell'opera *Theoricae novae planetarum*, che faceva seguito alla *Sfera* di Sacrobosco, e che era destinata a completare le conoscenze dell' *Almagesto* di Tolomeo. Peurbach intraprese pure una traduzione dal testo greco della parte geometrica della grande opera di Tolomeo, ma la morte gl'impedì di finirla; fu continuata dal Regiomontano suo discepolo, e apparve a Venezia nel 1496 col titolo: *Ptolomei Alexandrini astronomorum principis in magnam constructionem Georgii Purbachii, ejusque discipuli Johannis de Regiomonte astronomicon epitoma.* Quivi nei calcoli trigonometrici i due dotti traduttori sostituirono i seni alle corde, ma non fecero uso delle tangenti, conservando l'espressione $\frac{sinus}{cosenus}$.

278. Uno degli uomini più eminenti, che presenta la storia della matematica è REGIOMONTANO, che per l'universalità delle sue conoscenze, per la fecondità del suo ingegno, per il numero delle sue opere, si deve riguardare come il vero restauratore delle scienze in Europa. Nacque il 6 giugno 1436 nella piccola città di Königsberg (monte regio) nella Franconia, epperò il nome di *Regiomonte* o *Regiusmons*, ch'è la traduzione latina del nome della città tedesca, da cui l'aggettivo *Regiomontanus*, mentre il suo vero nome era GIOVANNI MÜLLER. Studiò nell'Università di Vienna sotto il Peurbach, col quale poi collaborò nella traduzione della parte geometrica dell' *Almagesto* di Tolomeo, e dopo di aver viaggiato per qualche tempo in Italia e in Germania, nel 1471 fondò a Norimberga un osservatorio ed aprì una stamperia. Invitato da Sisto IV, andò a Roma per la riforma del calendario, ma dopo poco morì il 6 luglio 1476.

Egli fu uno dei primi fra coloro che in Europa lessero le opere dei grandi matematici della scuola d'Alessandria, Euclide, Archimede, Apollonio, Menelao, ecc. nella loro lingua originale, facendone versioni più corrette di quelle che ci venivano dagli Arabi. La trigonometria deve a lui la sua forma attuale. Calcolò una tavola dei seni per ogni minuto prima per $r = 600000$ e più tardi per $r = 10$ milioni, ciò che fu un passo notevolissimo verso il calcolo dei numeri decimali. Calcolò ancora per ogni grado e per $r = 100000$ una tavola delle tangenti, da lui chiamata *tabula foecunda*, la quale poi è stata ampliata per ogni minuto e per $r = 10$ milioni da Erasmo Reinhold in una nuova edizione (Tübingen 1554).

279. La sua opera *De triangulis omnimodis libri quinque*, pubblicata dopo la morte dell'autore da Giovanni Schöner a Norimberga nel 1533, è un trattato completo di trigonometria piana e sferica. I due primi libri trattano

dei triangoli rettilinei e contengono moltissimi problemi originali. Si tratta sempre di determinare gli elementi di un triangolo, conoscendone tre. Alcuni di questi problemi sono risoluti mediante l' algebra, che l' Autore chiama *ars rei et census*. Così p. es. nel problema 12 del libro II, dati la base 20, l' altezza 5 e il rapporto dei due lati $\frac{3}{5}$, assumendo per incognita la differenza dei due segmenti determinati sulla base dall' altezza, mediante considerazioni geometriche, perviene all'equazione 20 *census plus* 2000 *aequales* 680 *rebus* cioè $20x^2 + 2000 = 680x$; nel problema 23 del medesimo libro, data la differenza 3 dei due lati, l'altezza 10 e la differenza 12 dei segmenti determinati dall'altezza sulla base, prendendo per incognita la base, ottiene l'equazione $\frac{1}{4}$ *census et* 136 *minus* 6 *rebus aequales videlicet* 4 *censibus et* $2\,\frac{1}{4}$ *demptis* 6 *rebus* cioè $\frac{1}{4}x^2 + 136 - 6x = 4x^2 + 2\,\frac{1}{4} - 6x$. Il terzo libro è dedicato alla trigonometria sferica ed è del genere dell' opera sulla sfera di Menelao. Il quarto libro tratta delle proprietà dei triangoli sferici e contiene una completa trigonometria. Nel quinto libro infine sono esposti teoremi e problemi, la massima parte originali, relativi ai triangoli sferici: vi si trova il teorema che *l'arco di circonferenza massima che biseca un angolo di un triangolo sferico, divide il lato opposto in due parti i cui seni sono proporzionali ai seni dei lati che comprendono l'angolo bisecato.* Ciò che caratterizza questa principale opera del Regiomontano è che la forma con la quale è svolta la trigonometria nei suoi tratti fondamentali si è conservata inalterata fino ad oggi.

280. A questo secolo appartiene il riformatore del-

l'Astronomia, NICOLÒ COPERNICO, nato a Thorn il 19 febbraio 1493 e morto a Franenberg il 7 maggio 1543. Non è qui il luogo di trattare della sua opera astronomica, ma in questa storia dev' essere ricordato, poichè nei suoi scritti di trigonometria si rileva matematico di notevole potenza.

281. Dobbiamo far cenno di NICOLÒ CHUQUET, baccelliere in medicina all'Università di Parigi, nato a Lione e morto a Parigi verso il 1500. Nel 1484 scrisse l'opera *La Triparty en la science des nombres*, nella quale si riscontrano i segni $\bar{p}$ e $\bar{m}$ per *più* e *meno;* vi si trova per la prima volta un simbolismo per le potenze della incognita, poichè il Chuquet scriveva $12^0, 12^1, 12^2, 12^3$, ecc. per $12, 12x, 12x^2, 12x^3$, ecc., come pure trovasi il simbolo $7^{\bar{1}m}$ per $7x^{-1}$; si trova ancora per indicare la radice il segno R con un esponente che ne rappresenta l'indice. Così

$R^1. 12 \, (=12)$, $R^2. 16 \, (=\sqrt{16})$, $R^3. 64 \, (=\sqrt[3]{64})$, ecc. ed encora

$$R^2. \underline{14. \bar{p}. R^2.180} = \sqrt{14+\sqrt{180}}.$$

In questa opera si trovano, forse per la prima volta, le parole *bilione*, *trilione*, *quadrilione*, ecc. per 10^{12}, 10^{18}, 10^{24}, ecc., mentre la voce *milione* per 10^6 è di origine italiana (1).

282. Un contemporaneo di Chuquet in Francia fu JACQUES LEFÈVRE, *Faber Stapulensis* (1455-1537), il quale pubblicò le più antiche opere di matematica. Nel 1496 pubblicò l' *Aritmetica* di Giordano Nemorario, nel 1507 la *Sferica* del Sacrobosco, nel 1514 le opere di Nicola di Cusa e nel 1516 un'edizione dell'Euclide in 15

(1) La voce *milione* trovasi la prima volta stampata nella *Summa de Arithmetica* di PACIUOLO (1494) e sembra che originariamente avesse il significato di « 10 tonnellate d'oro ». La parola *miliardo* aveva presso G. PFLETIER (1552, *Arithmétique*) il significato di milione di milioni, ma nell'*Arithmétique departie en trois livres*, ecc. (Lione 1566) di G. TRENCHANT troviamo il moderno significato di 1000 milioni.

libri contenente la traduzione del Campano e dello Zamberti. Già fin dal 1482 era stata pubblicata a Venezia dal Ratdolt un' edizione della traduzione fatta da Campano dell'Euclide : è questa la prima opera geometrica pubblicata con le figure nel testo.

283. La prima aritmetica pubblicata in Germania apparve nel 1482 a Barberg, edita da Enrico Petzensteiner. Era scritta da ULRICO WAGNER di Norimberga ed era stampata su carta-pecora. Nell' anno successivo il medesimo editore pubblicò una seconda aritmetica di autore anonimo, ma si crede scritta dallo stesso Wagner. Non rassomiglia ad alcun trattato antecedente, ma è semplicemente un'aritmetica commerciale.

Modellata sopra questa è l' aritmetica di GIOVANNI WIDMANN di Eger dal titolo *Behende und hubsche Rechenung auff allen Kauffmamschaffht*, pubblicata a Lipsia nel 1489. Contiene dopo il calcolo dei numeri interi e delle frazioni la teoria delle proporzioni, la somma di termini in progressione aritmetica e geometrica, la geometria secondo Frontino, la formola dell'area del triangolo dati i tre lati, ecc.

Degna di nota è la regola che vi si trova per calcolare il raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo, secondo la formola

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{h^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2h}\right)^2}$$

ove a è la base del triangolo, h l'altezza corrispondente ed x il minore dei segmenti determinati sulla base dall'altezza.

Quest' opera è importantissima nella nostra storia poichè è la prima in cui si sono trovati i segni + e —. Essi sono usati nei problemi di falsa posizione.

284. Le parole *minus* e *plus* si riscontrano molto prima del tempo del Widmann nelle opere di Leonardo Pisano, il quale le usava nei problemi col metodo di falsa posi-

zione nel senso di *errore positivo* e di *errore negativo*. Mentre Leonardo usava la voce *minus* anche per indicare l'operazione della sottrazione, non usava la voce *plus* per l'addizione, poichè dovendo esprimere $4 + 5$ scriveva « quattro e cinque ». L'Eneström dice che *plus* come indicante l'addizione trovasi per la prima volta in un'algebra italiana del XIV secolo. Le parole *plus* e *minus*, o le loro equivalenti nelle moderne lingue, furono usate da Paciuolo, Chuquet e Widmann. A riguardo dell'origine dei segni + e —, non è improbabile che da principio essi fossero delle semplici abbreviazioni di *plus* e *minus* e forme modificate delle lettere *p* e *m*. Questi segni + e — sono stati usati in Italia quasi subito dopo la comparsa dell'opera del Widmann da Leonardo da Vinci. Furono usati da Grammateus (1518), insegnante all'Università di Vienna, da Cristoforo Rudolff (1525) nella sua Algebra e da Stifel (1545) nella sua *Arithmetica integra*. Il loro uso poi, a poco a poco, divenne generale.

285. Leonardo da Vinci, uno dei più grandi pittori italiani, nato a Vinci presso Firenze nel 1452, morto in Francia nel 1519 durante una visita a Francesco I, fu uno di quei rari genî che lasciano la loro impronta in tutte le branche delle umane conoscenze, sicchè il loro nome si presenta nella storia di ciascuna di esse

Egli coltivò particolarmente la matematica e le scienze che ne dipendono, come la fisica, la meccanica, la musica, ecc., persuaso, come diceva, che non vi è punto certezza nelle scienze, se non vi si può applicare la matematica, o se non dipendono da questa in qualche maniera. Leonardo da Vinci lasciò numerosi manoscritti, parecchi dei quali furono rubati dagli eserciti francesi verso la fine del secolo XVIII, ed il dotto prof. Venturi dell'Università di Bologna per incarico dell'Istituto francese riferì su quelli concernenti argomenti fisici o matematici.

Egli si occupò specialmente di quelle teorie geometriche che possono trovare applicazione nell'arte del disegno. Nei suoi manoscritti si trovano disegni relativi alla costruzione di poligoni regolari o alla divisione della circonferenza in parti eguali; e spesso è posta la condizione che le costruzioni siano eseguite con una sola apertura di compasso. Però non tutte le costruzioni da lui indicate sono esatte, come del resto l'Autore stesso riconosce apponendovi la parola *falso*. Citiamo qui le seguenti.

Tracciata (Fig. 50) una circonferenza di centro O, si descrivano l'arco OA con centro un punto B di essa e quindi l'arco BOC con centro A sempre con la stessa apertura di compasso. Si tracci la corda BC che taglia l'arco OA in D; la congiungente OD tagli in E la prima circonferenza. Come è facile vedere, è l'arco BA la sesta, l'arco BC la terza, l'arco CE l'ottava e l'arco AE la ventiquattresima parte della circonferenza.

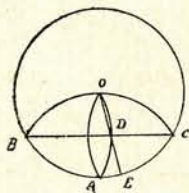



Fig. 50.

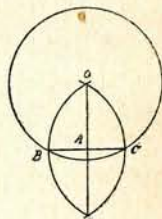



Fig. 51.

Ecco un altro esempio, ove Leonardo costruisce il lato dell'ettagono regolare inscritto in una circonferenza data. Centro (Fig. 51) in un punto B di un dato cerchio di centro O descrivasi l'arco OC e quindi col centro in C descrivasi l'arco BO; la perpendicolare OA alla corda BC è eguale al lato dell'ettagono regolare inscritto. Questo metodo per costruire (approssimativamente) il lato dell'ettagono era già noto ad Abu'l Wafa e a Giordano

Nemorario, il quale ultimo lo designò col nome di *regola indiana.*

Fra gli altri argomenti geometrici di cui si occupò Leonardo citeremo l'antico metodo di misurare l'altezza di un oggetto mediante la lunghezza dell'ombra da esso proiettata; il metodo per misurare la larghezza di un fiume; la quadratura di un settore circolare mediante la trasformazione di esso in un triangolo la cui base è eguale alla lunghezza dell' arco del settore, e la quadratura del circolo mediante il giro di una ruota, osservando che l' area del cerchio è eguale a quella descritta da una ruota di grossezza eguale alla metà del suo raggio, quando compie un'intera rotazione.

286. Dobbiamo annoverare fra' matematici di questo periodo il celebre pittore tedesco ALBERTO DÜRER, nato a Norimberga il 1471 e morto il 1528. Scrisse in tedesco un' opera di geometria, destinata agli architetti ed ai pittori e che è stata riprodotta in latino sotto il titolo seguente, che ne fa conoscere l' oggetto: *Institutionum geometricarum libri quatuor, in quibus lineas, superficies et solida corpora ita tractavit, ut non matheseos solum studiosis, sed et pictoribus, fabris aerariis ac lignariis, lapicidis, statuariis, et universis demum qui circino, gnomone, libella, aut alioqui certa mensura opera sua examinant, sint summe utiles et necessarii.* Nel primo libro insegna a descrivere diverse linee curve, come p. es. spirali piane, cilindriche, sferiche e coniche, non che le curve coniche; è una delle opere più antiche, nel Medio-Evo, che abbia trattato delle sezioni coniche.

Nel secondo libro si trovano le costruzioni dei poligoni inscrittibili e circoscrittibili al cerchio e di altre figure regolari formate da archi di cerchio, la quadratura del cerchio ed inoltre un metodo per riunire diversi poligoni in modo da completare un piano. Vi si trova la seguente costruzione del lato del pentagono regola-

re (1): Costruiti (Fig. 52) i due diametri ortogonali AC,

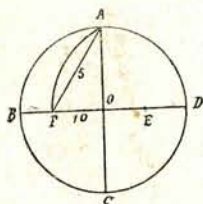
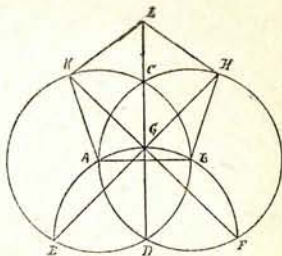



Fig. 52. Fig. 53.

BD e il punto medio E del raggio OD, descrivasi con centro E e raggio EA l'arco AF che interseca in F il raggio OB: saranno la congiungente AF eguale al lato del pentagono regolare ed il segmento OF eguale al lato del decagono inscritti nel cerchio di centro O. Dipoi l' autore indica una sua costruzione speciale per il pentagono regolare, dato il lato; costruzione che qui riportiamo, poichè degna di nota, potendosi eseguire con una sola apertura di compasso. Si descrivano due circonferenze coi centri gli estremi del lato dato AB e con raggio questo lato (Fig. 53); le due circonferenze s'intersechino nei punti D e C. Con centro uno di questi punti, p. es. D, e con lo stesso raggio si descriva l'arco $EABF$, il quale intersechi le due prime circonferenze in E ed F e la corda CD in G. Le congiungenti EG ed FG determinino sulle due prime circonferenze i punti H e K, e la circonferenza di centro H e del medesimo raggio determini sulla retta DC il punto L. Si ottiene così il pentagono $ABHLK$, il quale è equilatero ed approssimativamente equiangolo.

Nel terzo libro l'Autore tratta di alcuni corpi, di colonne e piramidi, delle linee che si possono tracciare sulle

---

(1) Questa costruzione per la prima volta trovasi nel primo libro dell'*Almagesto* di Tolomeo.

loro superficie, della misura di altezza e della costruzione degli orologi solari. Nel quarto descrive i cinque poliedri regolari ed altri solidi che possono formarsi coi poligoni regolari, e dà inoltre parecchie soluzioni del problema di Delo. In quest'ultimo libro il Dürer si propone di costruire *la rete di poligoni regolari che riuniti formino un poliedro regolare*, e risolve questo quesito pei cinque poliedri regolari e per alcuni poliedri semiregolari.

287. Ultimo matematico di cui dobbiamo brevemente occuparci è Luca Paciuolo, conosciuto col nome di Fra Luca, monaco dell' ordine dei Minori, il quale molto contribuì al progresso della matematica. Egli nacque a Borgo S. Sepolcro, nella provincia di Arezzo, verso il 1445 e morì a Firenze verso il 1514. Come egli stesso ci fa sapere, s'istruì a Venezia sotto la disciplina di Domenico Bragadini, succeduto nella cattedra al perspicacissimo Paolo della Pergola. Insegnò quindi matematica successivamente a Firenze, Perugia, Roma, Pisa, Napoli, Milano, Bologna e Venezia.

A Milano nella corte di Ludovico il Moro strinse amicizia con Leonardo da Vinci, insieme al quale lasciò la Lombardia all'arrivo dei Francesi.

288. La sua opera principale, intitolata *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalità*, può considerarsi come l' origine della scuola italiana, e potentemente contribuì a dare alla matematica la nuova forma presa fin dalla rinascenza per l'alleanza dell'algebra degl'Indiani con la geometria dei Greci. Quest'opera, divisa in *distinzioni*, comprende due parti principali : l'una relativa alla scienza del calcolo tratta dell'aritmetica e dell'algebra, l'altra della geometria. Nella prima parte trovasi un trattato completo di aritmetica speculativa, sulle proprietà dei numeri : termina con una serie di questioni sui numeri quadrati, prese dal libro dei quadrati di Leonardo Pisano. L'aritmetica pratica inco-

mincia con l' esposizione del sistema di numerazione; seguono le quattro operazioni fondamentali, di ciascuna delle quali l' autore dà parecchi procedimenti; la teoria delle progressioni e l'estrazione delle radici quadrata e cubica; poi il calcolo delle frazioni; indi le regole del tre e quelle di falsa posizione dall' Autore, dette regole d'*Helcataym*, secondo Leonardo Pisano. Si trova poi l'aritmetica commerciale trattata con una serie di questioni e di esempi. L' algebra, che l' Autore riguarda come la parte della scienza del calcolo più necessaria all' aritmetica ed alla geometria, incomincia con la *distictio octava* ed è chiamata, secondo l'uso comune, l'*Arte maggiore* o la regola della *cosa* o *Algebra e Almucabala.* Vi si trovano le regole dei segni per le operazioni; quella dell'addizione è così enunciata:

Piu cō piu gionto fa sempre piu
Meno cō meno gionto fa ancor men.
Piu cō meno gionto sempre se abatte e fara la maggiore denominatione
Meno cō piu quello medesimo che. $\overline{p}$. *cō.* $\overline{m}$.

L'autore, come nell'opera del Chuquet, usa i segni $\overline{p}$ e $\overline{m}$ per *più* e *meno.* Egli insegna di fare le operazioni aritmetiche sulle quantità irrazionali, e dimostra la più parte delle proposizioni del X libro di Euclide, trattando così estesamente di queste quantità. Passa quindi alle equazioni di 2° grado, delle quali considera, seguendo l'esempio degli Arabi, separatamente i tre casi

I. $x^2 + px = q$, II. $x^2 = px + q$, III. $x^2 + q = px$,

dando per la risoluzione di ciascuna la seguente regola espressa in versi di un latino semibarbaro:

I. Si res et census numero coequantur, a rebus
Dimidio sumpto, censum producere debes,

Addereque numero, cuius a radice tollens,
Tolle semis rerum, census latusque redibit.

II. Et si cum rebus drachmae pares sint,
Adde, sicut primo, numerum producto quadrato
Ed rebus mediis, hujusque radice recepta,
Si rebus mediis addes, census patefiet.

III. At si cum numero radius census equabit,
Drachmas a quadrato deme rei medietatis,
Hujus quod superest radicem adde, traheve
A rebus mediis, sic census cossa notescet.

Eccone il significato:

I. Se si ha l' equazione della forma $x^2 + px = q$, bisogna prendere la metà del coefficiente p delle *cose* (dell'incognita), farne il *censo*, ossia il quadrato, aggiungerlo al *numero* q, termine noto detto anche l' *assoluto*, estrarne la radice quadrata e sottrarne infine la metà del medesimo p; il resto sarà il valore cercato.

II. Se l'equazione è della forma $x^2 = px + q$, si aggiunga, come prima, il numero q al quadrato della metà del coefficiente p, si estragga la radice quadrata, si aggiunga la metà del detto coefficiente e si avrà il valore di x.

III. Se in ultimo l'equazione è della forma $x^2 + q = px$, sottraendo q dal quadrato della metà di p, estraendone la radice quadrata ed aggiungendola alla metà di p o togliendola dalla detta metà la somma o la differenza sarà il valore cercato.

Nei due primi casi Fra Luca, seguendo anche in ciò gli Arabi, riconosce solo la radice positiva e non la negativa, quantunque egli debba aver concepito l' idea di numero negativo, poichè, p. es., dice *meno 4 è manco del nulla e per conseguenza debito.* Nel terzo caso riconosce le due radici che sono tutte e due positive.

*

Ecco un esempio, nel quale l'Autore risolve l'equazione $x^2 + 4 = 5x$:

« Trouame 1. numero che moltiplicato per.5. facia quanto el suo quadrato gionto con 4. Poni chel sia.1. *co.* el suo quadrato ene.1. *ce* giontoci. 4. sera. equale a. 5. via. 1. *co.* cioè. 1. *ce.* $\bar{p}$. 4. se aguagliano a. 5. *co.* Smezza la cose. Multiplica in se. Cauane el numero. Restaura $2\,\frac{1}{4}$. E la *R* $2\,\frac{1}{4}$. $\bar{p}$. $2\,\frac{1}{2}$ per lo dimezamento de le cose valse la cosa. E fo el vomondato numero cioe 4.... ».

Egli dice che molte altre equazioni di grado superiore possono ricondursi a quelle di secondo e considera le equazioni che contengono l'incognita, il suo quadrato e la sua quarta potenza; ciò dà luogo ad otto casi che l'Autore così enuncia:

1. *Censo de censo*	equale a *nūo* (=numero)	cioè $ax^4 = e$
2. *Censo de censo*	equale a *cosa*	» $ax^4 = dx$
3. *Censo de censo*	equale a *censo*	» $ax^4 = cx^2$
4. *Censo de censo e censo*	equale a *cosa*	» $ax^4 + cx^2 = dx$
5. *Censo de censo e cosa*	equale a *censo*	» $ax^4 + dx = cx^2$
6. *Censo de censo e nūo*	equale a *censo*	» $ax^4 + e = cx^2$
7. *Censo de censo e cēso*	equale a *numero*	» $ax^4 + cx^2 = e$
8. *Censo de censo*	equale a *numero e censo*	» $ax^4 = e + cx^2$.

Egli insegna di risolvere questi casi tranne il 4. e 5. da lui detti *impossibili*, poichè non possono ridursi al secondo grado ma al terzo, e ciò prova che al tempo

di Fra Luca era ancora incognita la risoluzione delle equazioni di terzo grado (1).

289. Questa prima parte dell'opera termina con le regole di società e con una lunga serie di questioni relative alle operazioni commerciali ed anche alla tenuta dei libri in partita doppia.

In molte questioni Fra Luca si serve di considerazioni geometriche per illustrare le sue regole di calcolo; dimostra così le regole di falsa posizione; la regola dei segni e le formole per la risoluzione delle equazioni del secondo grado. Reciprocamente, come adesso diremo, nella seconda parte dell'opera che tratta di geometria, l'Autore fa grande uso dell'algebra.

Nella risoluzione dei problemi l'Autore usa eleganti artifizi di calcolo. P. es. cercando due numeri di cui la somma dei quadrati sia 20 ed il prodotto 8, Fra Luca invece di porre il sistema delle due equazioni $x^2+y^2=20$, $xy=8$, dalle quali avrebbe ottenuto un'equazione di 4° grado riducibile al secondo, assume come incognite per il primo numero la somma e per il secondo la differenza di due incognite (la prima detta *cosa* e la seconda *quantità*) ed ottiene quindi il sistema

$$x^2+y^2=10, \quad x^2-y^2=8$$

da cui $x=3$, $y=1$, epperò i due numeri cercati sono 4 e 2.

290. La seconda parte comprende gli elementi di geometria, e quantunque basata sugli *Elementi* di Euclide, ne differisce sotto molti rapporti. Essa è divisa in 8 capitoli, in considerazione, dice l'autore, delle otto beatitudini.

Nel primo, che considera i triangoli ed i quadrilateri, si trovano la massima parte delle proposizioni

(1) La risoluzione delle equazioni generali di terzo grado è dovuta a Tartaglia (1500-1557).

dei libri I, II e VI di Euclide. L'Autore dimostra, al modo indiano, che l'area del triangolo è eguale al prodotto della base per la metà dell'altezza; dimostra la formola dell'area del triangolo in funzione dei lati, come il Fibonacci e come gli Arabi. Calcola l'altezza del triangolo servendosi del teorema dei due segmenti che essa determina sulla base, cioè che la differenza dei quadrati dei due lati del triangolo è eguale alla differenza dei quadrati dei due segmenti determinati dall'altezza sulla base, ovvero che il prodotto della somma dei due lati per la loro differenza eguaglia il prodotto della base per la differenza dei due segmenti di essa. Fra Luca dimostra questo teorema in modo elegantissimo, non servendosi del teorema di Pitagora, ma costruendo una figura, nella quale si trovano le espressioni geometriche dei quattro fattori che formano questa eguaglianza, e considerando triangoli simili. Nel secondo risolve per diversi casi il problema: dati i tre lati di un triangolo e due punti, ciascuno sopra uno di due lati, determinare la lunghezza del segmento che li unisce. Nel terzo capitolo tratta dell'area del quadrilatero e di altri poligoni, risolvendo mediante l'algebra, molti problemi sui rettangoli. Il quarto comprende le proposizioni che formano oggetto del III libro di Euclide, e quelle per la misura del cerchio: dimostra, come Archimede, mediante l'iscrizione del poligono di 96 lati, che il rapporto della circonferenza al diametro è $^{22}/_{7}$, ed insegna di formare la tavola delle corde degli archi, data da Tolomeo nel primo libro dell'*Almagesto*. Nel quinto divide una figura in parti aventi un dato rapporto; e nel sesto espone i metodi per determinare i volumi dei corpi, riportando anche le proposizioni dell'XI libro dell'Euclide. Nel settimo descrive alcuni strumenti coi quali si possono misurare ad occhio le dimensioni del corpo. Finalmente nell'ottavo si trova una raccolta di cento problemi di geometria, risoluti la massima

parte mediante l'algebra, seguita da uno studio sui cinque poliedri regolari. Ecco alcune delle questioni che fanno parte di questi cento problemi:

1°. *Dati due lati di un triangolo e la sua area, calcolare il terzo lato.*

2°. *Date l'area e la differenza dei due lati di un rettangolo, calcolare i lati.* Se a^2 è l'area e d la differenza fra' due lati, Fra Luca invece di assumere come incognite i due lati del rettangolo, molto opportunamente prende per il lato maggiore *cosa più* $\frac{d}{2}$, cioè $x + \frac{d}{2}$, e per il lato minore *cosa meno* $\frac{d}{2}$, cioè $x - \frac{d}{2}$, ed ottiene immediatamente l'equazione $x^2 - \frac{d^2}{4} = a^2$, da cui deduce i valori dei lati.

3°. *Trovare il diametro del cerchio inscritto o quello del cerchio circoscritto ad un triangolo di cui si conoscano i lati.*

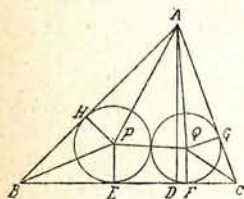



Fig. 54.

4°. *In un triangolo descrivere due cerchi eguali, tangenti fra loro e di cui ciascuno tocchi due lati.*

Ecco il modo come l'Autore risolve questo problema. Indicando con a, b, c i lati BC, CA, AB, (Fig. 54) con h l'altezza del triangolo e con x il raggio dei due cerchi, si ha tr. $ABC = \frac{ah}{2}$, tr. $APQ = x\ (h - x)$, tr. $APB = \frac{cx}{2}$, tr. $AQC = \frac{bx}{2}$, tr. BPE + tr. $QFC = \frac{(a-2x)x}{2}$, rett. $PQFE = 2x^2$, epperò

$$\frac{ah}{2} = x\ (h-x) + \frac{cx}{2} + \frac{bx}{2} + \frac{(a-2x)x}{2} + 2x^2$$
$$= \left(h + \frac{a+b+c}{2}\right)x$$

da cui $$x = \frac{ah}{2h + a + b + c}$$

L' Autore opera supponendo $a = 15$, $b = 13$, $c = 14$, $h = 11\frac{1}{5}$.

291. Non solo in questo ma in tutti i problemi i dati sono sempre numerici, e le soluzioni algebriche dipendono quasi sempre da equazioni di secondo grado. Similmente anche in tutte le parti dell'opera, le quali costituiscono gli elementi di geometria, le figure sono sempre espresse da numeri, come se si trattasse di fare un'applicazione particolare di un teorema. Così, p. es., per dimostrare la formola dell'area del triangolo in funzione dei lati, suppone questi eguali ordinatamente a 13, 14 e 15, e nel corso del ragionamento si serve sempre di questi numeri. Questo metodo, preso dagli Arabi, i quali a loro volta l'avevano imitato dagl'Indiani, è stato seguito quasi esclusivamente da tutti i geometri del XVI secolo fino a quando Vieta non introdusse l'uso generale delle lettere nell'algebra.

292. Fra Luca ha lasciato altre opere che meritano di essere citate, ma che non hanno l' importanza di quella ora esaminata. Una è intitolata: *Lucae Pacioli divina proportione, opera a tutti gli ingegni perspicaci e curiosi necessaria ; ove ciascun studioso di philosophia, prospettiva, pictura, sculptura, architectura, musica e altre matematiche, soavissima, sottile e admirabile dottrina consequira e delectarassi con varie questione di secretissima scientia.* Venetiis 1509. L'Autore chiama *proportione divina* la divisione della retta in media ed estrema ragione, della quale divisione dimostra numerose proprietà, facendone diverse applicazioni alle arti. In questa opera, ove le figure sono state disegnate da Leonardo da Vinci, si leggono non pochi fatti biografici, che rendono il libro interessantissimo a chi si occupa

della storia letteraria e scientifica. Una seconda tratta dei poligoni e dei poliedri regolari, dell'inscrizione mutua di queste figure le une nelle altre, ed ha per titolo: *Libellus in tres partiales tractatus divisus quorumcumque corporum regularium et dependentium active perscrutationis*, Venezia 1508. In questa opera l'Autore fa anche frequente uso dell'algebra. Altri scritti del medesimo Autore, oltre di una traduzione degli *Elementi* di Euclide, sono: l'opera *De viribus quantitatis* che conservasi manoscritto nella Biblioteca universitaria di Bologna; uno scritto sul *giuoco degli scacchi* ed un altro sull'*arte del costruire,* ch'egli promise di ampliare e completare con un trattato di prospettiva, ma non ebbe tempo di farlo.

293. Gli scritti di Fra Luca si differenziano grandemente da quelli dei matematici greci, poichè riposano sulla costante unione dell'algebra con la geometria, carattere che si nota altresì in quasi tutte le opere dei matematici del secolo XVI, come abbiamo innanzi osservato. E siccome le opere di questo Autore sono state le prime che vennero divulgate per la stampa, esse sono perciò riguardate come l'origine, al principio del secolo successivo, della nuova forma che la matematica prese e degli immensi progressi fatti. Da quest'epoca la matematica entra in una nuova fase di sviluppo, che può solamente paragonarsi al periodo aureo della geometria greca e segna perciò la fine del Medio-Evo.

FINE.

INDICE.

Estratto del Catalogo Generale

della Casa Editrice *Remo Sandron*

BIBLIOTECA "SANDRON" DI SCIENZE E LETTERE

AUGIAS (Carlo). **L'eredità del Secolo decimonono.** — *Ricchezze. Problemi. Speranze.* — (N. 14). Un vol. in-16, pag. 443 . . . . 3 50

Dedica — Premessa — Concetto generale del Secolo — Il Secolo e la Fisica — Il Secolo e la Società — Il Secolo, la Politica e le Nazionalità — Oneri patrimoniali del Secolo — Sguardo riassuntivo finale.

BACCI (Orazio). **Prosa e prosatori.** *Scritti storici e teorici.* — (N. 32). Un vol. in-16, pag. XVI-400 3 50

Dedica — Prefazione — Prosa e prosatori — Della prosa volgare del Quattrocento — Un trattatello mnemonico di Michele del Giogante — Le lettere del Giusti e alcuni caratteri della sua prosa e lingua — Gabriele D'Annunzio prosatore — Per la prosa viva («Racconti pistoiesi» e «fonografie valdelsane») — Il problema dello stile — L' «Idioma gentile» d'Edmondo De Amicis — Per l'arte dello scrivere — Contro la Stilistica? — Ancora del problema della prosa.

Appendice: I. Sullo studio di Francesco Zambaldi: «Delle teorie ortografiche in Italia». II. Sullo studio di K. Vossler: «Benvenuto Cellini's Stil in seiner Vita». III. Sul libro di G. Lisio: «L'arte del periodo nelle opere volgari di Dante».

BARZELLOTTI (Giacomo). **Dal Rinascimento al Risorgimento.** — (N. 25). Un vol. in-16, pag. 404, L. 3,50 (esaurito).

ITALIA MISTICA E ITALIA PAGANA — Italia mistica — I caratteri storici del Cristianesimo italiano — La basilica di S. Pietro e il Papato dopo il concilio di Trento — L'idea religiosa negli uomini di Stato del Risorgimento — PER UNO STUDIO STORICO-PSICOLOGICO DELLA NOSTRA LETTERATURA — Della sincerità nell'arte e nello stile dei nostri scrittori — Il problema storico della prosa nella letteratura italiana — La letteratura e la rivoluzione in Italia avanti e dopo il 1848 e il 49. La nostra letteratura e l'anima nazionale.

BERNHEIM (Ernesto). **La storiografia e la filosofia della storia.**—*Manuale del metodo storico e della filosofia della storia.* — Traduzione autorizzata del Dr. PAOLO BARBATI. — (N. 34). Un vol. in-16 pag. VIII-432 . . . . 5. —

Prefazione del traduttore — CONCETTO ED ESSERE DELLA SCIENZA STORICA — Concetto e svolgimento della scienza storica *(storia narrativa — istruttiva — evolutiva)* — Limitazione e divisione *(tematica — cronologica)* del materiale storico — Relazioni tra la scienza storica e le altre scienze *(con la filologia — con la politica e la scienza di Stato — con la sociologia — con la filosofia — con l'antropologia, l'etnografia e l'etnologia — con le scienze naturali)* — Relazione della storia con l'arte — Essenza e compito della scienza storica — FILOSOFIA DELLA STORIA— Sviluppo — Concetto e compiti — Appendice bibliografica.

CALÒ (Giovanni). **Il problema della libertà nel pensiero contemporaneo.** — (N. 31). Un vol. in-16, pag. XII-228 . . . . 3 50

Genesi e sviluppo del contingentismo — La contingenza e la libertà — La soluzione prammatistica del problema della libertà — CONCLUSIONE — La libertà del volere.

CASELLI (Carlo). **La lettura del pensiero.**—*Memorie ed appunti di un esperimentatore.* — (N. 12). Un vol. in-16, pag. 93. . . . . 1 —

Ragione del lavoro — Lettera di dedica — Chi sono — Come divenni lettore del pensiero — Il mio metodo — Le guide — Gli esperimenti — Osservazioni.

— **L' affettività degli animali.** — (N. 16). Un vol. in-16, pag. 157 . . . . 1 —

Prefazione — Animali delle classi inferiori — Molluschi — Crostacei — Ragni — Insetti — Api e Formiche — Pesci — Batraci — Rettili — Uccelli — Mammiferi.

CROCE (Benedetto). **Estetica** *come scienza dell'espressione e linguistica generale.* — Teoria e Storia. Seconda edizione riveduta dall'Autore. — (N. 19). Un vol. in-8, pag. 537 . . . . 5 —

ESTETICA COME SCIENZA DELL'ESPRESSIONE E LINGUISTICA GENERALE. Capitoli I a XVIII. — STORIA DELL'ESTETICA. Capitoli I a XVIII. — Appendice bibliografica.

Questo volume è composto di una parte teorica e di una parte storica, ossia di due libri indipendenti ma destinati ad aiutarsi a vicenda....

....L'autore si è esteso, specie nella parte teorica, su questioni, che son generali e laterali rispetto al tema da lui trattato. Ma ciò non sembrerà

divagazione a chi rammenti che, rigorosamente parlando, non vi ha scienze filosofiche particolari, che stiano da sè. La filosofia è unità, e, quando si tratta di estetica o di logica o di etica, si tratta sempre di tutta la filosofia, pur lumeggiandosi più vivamente e minutamente (per convenienza didascalica) un lato determinato di quell'unità inscindibile. E, viceversa, appunto per questa strettissima connessione di tutte le parti della filosofia, l' incertezza e l'equivoco, che regnano intorno all'attività estetica, intorno alla fantasia rappresentatrice e produttrice, intorno a questa primigenia delle attività dello spirito e domestico sostegno delle altre, ingenera equivoci, incertezze ed errori in tutto il resto: nella psicologia come nella logica, nella teorica della storia come nella filosofia pratica. Se il linguaggio è la prima manifestazione spirituale, e se la forma estetica è il linguaggio stesso in tutta la sua vera e scientifica estensione, non si può sperar d'intender bene le fasi posteriori e più complicate della vita dello spirito, quando di essa il primo e più semplice momento resta mal noto, mutilato, sfigurato. E dal chiarimento di quel primissimo dato deve aspettarsi la rettificazione di molte conseguenze e la soluzione di alcuni problemi filosofici, che appaiono di solito quasi disperati. — È questo per l'appunto il pensiero animatore del presente lavoro. E, se il tentativo teorico qui esposto e l' illustrazione storica con la quale è accompagnato, gioverà ad acquistare amici a tali studii, spianando ostacoli ed indicando vie da percorrere, se ciò accadrà più particolarmente in questa Italia, le cui tradizioni estetiche — come a suo luogo vien mostrato, — sono assai nobili, l'autore stimerà di avere raggiunto il suo scopo, e uno dei suoi più vivi desiderii sarà stato soddisfatto.

Non ancora compiuto l'anno della pubblicazione della prima edizione si pone mano alla seconda di questo libro, del quale anche son prossime a veder la luce le traduzioni francese e tedesca. Questa favorevole accoglienza e le discussioni alle quali il libro ha dato e dà luogo, paiono buon segno che il voto espresso nelle ultime linee della precedente avvertenza avrà adempimento.

L'autore ha, in questa seconda edizione, riveduto il suo lavoro, introducendovi qualche correzione ed alcuni piccoli chiarimenti ed aggiunte.

(dall' *Avvertenza* che precede l'opera).

DERADA (Carlo Modesto). **Gli uomini e le riforme pedagogico-sociali della Rivoluzione francese.** —*Dall' « ancien régime » alla Convenzione.* — (N. 23). Un vol. in-16, pag. 262. . . . . 2 50

Dedica — Prefazione — Introduzione — Le origini positive della Rivoluzione francese — L'istruzione pubblica innanzi la Rivoluzione francese — La lotta fra

sig — 10. Reforgiato — APPENDICE: ANATOMIA PATOLOGICA DI L. BYRON — MANIFESTAZIONI ARTISTICHE ACCESSUALI IN UNA BAMBINA (D.R FERRARA DI REGGIO)— NUOVE PROVE DELLA PAZZIA DI COMTE.

LOMBROSO (Cesare). **Nuovi studii sul genio.**—*I. Da Colombo a Manzoni*, con 4 tavole e incisioni intercalate nel testo—(N. 17). Un vol. in-16, pag. 267 3 —

Prefazione — LA PAZZIA ED IL GENIO DI CRISTOFORO COLOMBO (con una tavola — Caratteri antropologici — Grafologia — Stile pazzesco — Ignoranza — Senso morale — Crudeltà — Menzogne — Delirio — Tav. I. Autografi di Colombo — MANZONI — L'uomo — Esame somatico e biologico — Doppia personalità — Scrittura — Balbuzie — Assenze epilettoidi — Esame psicologico — Amnesie — Paure — Paradossi — Abulia — Senso pratico — Affettività — Precocità — Contraddizione — Bigottismo — Eredità morbosa — Manzoni — Giulia — Applicazioni letterarie — Bisticci — Tav. II, III e IV. Autografi di Manzoni — SWEDENBORG — Genialità — CARDANO — Eredità morbosa — Cardano — Pazzia morale — Paranoia persecutiva ed ambiziosa. — Genialità — PETRARCA — Melanconia — Epilessia ambulatoria — Bugia — Contraddizione — Erotismo eccessivo — Influenza meteorica. — Vanità — Poca affettività — Epilessia psichica — genialità — PASCAL — Eredità — Rami collaterali — Pascal — FRANC. DOMENICO GUERRAZZI — Eredità — F. D. Guerrazzi — Precocità — Cause: debolezza congenita, malattie, dolori mortali, soverchio lavoro intellettuale — Esaurimento— Delirio melanconico — Misticismo — Allucinazioni — Delirio di grandezza e di persecuzione — Bizzarrie — Impulsività e contraddizioni — Delirio — Nevrosi — Epilessia — Riflessi del carattere nello stile e nelle opere — VERLAINE — SCHOPENHAUER E GOETHE — Schopenhauer — Goethe — TOLSTOI— APPENDICE: ALESSANDRO MAGNO — CAMBISE — GAETANA AGNESI — STRINDBERG— RICCARDO WAGNER — GOLDONI — MAISONNEUVE — ROUSSEAU.

— **Nuovi studi sul genio.**—*II. Origine e natura dei geni* con 3 tavole e 6 figure nel testo.—(N. 18). Un vol. in-16, pag. 278 . . . . 3 —

Sull'unità del genio — Cause note della varietà dei genii — Vantaggi dell'agiatezza e della miseria — Vantaggi della libertà — Influenza della pubertà — Influenza dell'amore — Influenza della pubertà sulle conversioni e sulla criminalità (con una tavola) — La pubertà nei degenerati — Psicopatie sessuali — Impressioni tardive. — Ancora delle impressioni tardive ed altre cause — I sogni e l'incosciente nel genio — Dell'idea fissa nel genio — Classificazione delle degenerazioni ed il genio — I fenomeni contradittori nel genio — Anatomia patologica dei genii (con 3 figure ed 1 tavola) — La pazzia del genio secondo i pensatori antichi — La psicosi del genio nell'opinione dei popoli primitivi e selvaggi — Genii creati artificialmente dai popoli primitivi — Appendici.

MALVERT. Scienza e religione. Traduzione autorizzata, con prefazione di GIUSEPPE SERGI, con 156 figure intercalate nel testo.—(N. 29). Un vol. in-16, pag. VIII-224 . . . . 2 50

Prefazione di GIUSEPPE SERGI — Bibliografia — ORIGINE DELLE RELIGIONI — Il Sole ed il Fuoco — L'opera delle religioni — IL SOLE — L'antico culto — Ultime trasformazioni — Le imagini del Sole — IL FUOCO — Il culto della Croce. — Ultima trasformazione — L'Agnello sulla Croce — IL VANGELO — Il Messia — La Morale — IL CULTO — Natale — Pasqua — La Messa — Riti — Costumi — Preghiere — Litanie — Processioni — Canti — Ceri — Imagini — I SANTI — Origini e filiazioni — Culto medico—Le acque — Le pietre — I passi— Il *phallus* — Le reliqne — LA SCIENZA.

MARCHESINI (Giovanni). **La teoria dell' utile.** — *Principii etici fondamentali e applicazioni.* — (N. 9). Un vol. in-16, pag. 232. . . . . 3 —

Introduzione — P. I. — Genesi e natura fondamentale del fatto etico — L'etica e l'utile razionale — L'utilismo razionale — I tre principii fondamentali dell'etica — Il metodo dell'utile — L'energia etica — La libertà etica — Il concetto del dovere, ossia della necessità etica — La responsabilità — Il concetto del diritto — L'etica e il diritto — P. II. — La vita fisica — La vita psichica — La vita civile e il diritto della sovranità — La vita civile e il delitto — La vita civile e il diritto punitivo — La vita civile ed il problema economico speciale.

MORELLO (Vincenzo) (*Rastignac*). **Nell'arte e nella vita.** — (N. 11). Un vol. in-16, pag. 367 . . 4 —

A Gabriele D'Annunzio — Leopardi e la critica psico-antropologica — Catullo e De Musset poeti d'amore — Il romanzo italiano — Reazione di razza (Bourget, D'Annunzio, Barrès) — Ibsen — Germinal — Clinica e critica — La tragedia simbolica — Attrici: Sarah Bernhardt. Eleonora Duse. Tina di Lorenzo —Due stazioni: Sull'Akropoli. Trinità della Cava — L'educazione nazionale.

PATRIZI (L.-M.). **Nell' estetica e nella scienza.** — *Conferenze e polemiche.* — (N. 5). Un vol. in-16, pag. 302, con figure nel testo . . . . . . 4 —

Dedica — Passioni criminali d'estetica e di scienza — 1. Crimine estetico — 2. Crimine scientifico — Primi esperimenti intorno all'influenza della musica sulla circolazione del sangue nel cervello umano — L'antropologia criminale e la psichiatria nel romanzo dei De Goncourt — Psicologia della curiosità intellettuale — Come i muscoli tremano e come obbediscono alla volontà — Fisiologia dell' arte leopardiana — La polemica scientifico-letteraria sopra Leopardi — 1. Origini prossime e remote della polemica — 2. Il concetto profano della degenerazione — 3. L'eredità psicopatica di Leopardi — 4. Alcune anomalie del Leopardi—5. I sensi e l'arte del Leopardi — 6. Critica a spizzico — 7. I sentimenti affettivi e morali di G. Leopardi — 8. Le radici somatiche del pessimismo.

PETRONE (Igino). **Problemi del mondo morale** *meditati da un idealista.* — (N. 26). Un vol. in-16, pag. 335 . . . . 3 50

La filosofia del diritto al lume dell'idealismo critico — Il valore ed i limiti di una psicogenesi della morale — Le nuove forme dello scetticismo morale e del

materialismo giuridico — La visione della vita di Fed. Nietzsche e gl'ideali della morale — L'umano contro il superumano — Critica di Fed. Nietzsche — Il problema della morale — Il valore della vita — L'etica come filosofia dell'azione e come intuizione del mondo.

PIAZZI (Giovanni). **L'arte nella folla.** — (N. 8). Un vol. in-16, pag. 421 . . . . 4 —

Dedica — IL SENSO ESTETICO — I sentimenti estetici — Segue: I sentimenti estetici — I sentimenti artistici — L'OPERA D'ARTE — L'evoluzione progressiva nell'arte — La Dinamica nell'arte — L'evoluzione regressiva nell'arte — L'ARTE E LA FOLLA — La folla nell'arte — L'arte immediata — I disturbi della percezione nell'arte — FINALE. Catabasi?

SAVJ LOPEZ (Paolo). **Trovatori e poeti.** *Studi di lirica antica.* — (N. 30). Un vol. in-16, pag. 246 3 —

Avvertenza— Dolce stil nuovo. *Note* — L'ultimo trovatore. *Note.* — Mistica profana. *Note* — La morte di Laura. *Note* — Uccelli in poesia e in leggenda. *Note* — Lirica spagnuola in Italia. *Note.*

SERGI (Giuseppe). **Leopardi al lume della scienza.** — (N. 3). Un volume in-12, pag. 195 . . . 3 —

Prefazione — Discussioni delle condizioni fisio-psicologiche del Leopardi e delle origini psicologiche del suo pessimismo — La degenerazione in Leopardi — La produzione letteraria di Leopardi — Analisi obbiettiva della composizione lirica— Il dolore nei canti di Leopardi — I canti secondo la cronologia psicologica — Il tono della lirica leopardiana — Leopardi come poeta di genio — Genio e degenerazione in Leopardi.

— **Problemi di scienza contemporanea.**—(N. 21) Un vol. in-16, pag. 287. . . . . 2 50

ATTORNO AL GENIO — Pensare senza coscienza — Gli uomini di Genio — Nuovi osservazioni e critiche intorno al Genio — ATTORNO ALL'EREDITÀ BIOLOGICA — L'eredità biologica nell'evoluzione organica e psichica — INDUZIONI ANTROPOLOGICHE — Intorno agli abitanti primitivi di Europa — La cultura mediterranea e la sua diffusione in Europa — Roma primitiva.

STOPPOLONI (Aurelio). **Leone Tolstoi educatore.** — (N. 20). Un vol. in-16, pag. 230 . . . . 2 —

Dedica a Giovanni Bovio — Lettera-Prefazione di Lino Ferriani — La scuola di Yasnaja Poliana — Leone Tolstoi, istitutore — Seguaci e critica.

STRATICÒ (Alberto). **Dell'educazione dei sentimenti.** — (N 22). Un vol. in-16, pag. 133. . 2 50

Introduzione — DEL VALORE DEI SENTIMENTI — Studî sulla psicologia del sentimento — Manifestazioni del sentimento nelle funzioni psichiche — Il sentimento e le funzioni psichiche intellettuali — Il sentimento e le funzioni psichiche

volitive — Ufficio dei sentimenti nella vita sociale — I sentimenti in rapporto agli altri fattori dell' evoluzione sociale — I sentimenti e le riforme sociali — EDUCAZIONE DEI SENTIMENTI — Del dolore e del piacere — Della paura e della collera — Del sentimento di sè — Delle emozioni sessuali — Della simpatia — Dei sentimenti sociali o morali — Dei sentimenti religiosi — Dei sentimenti estetici— Dei sentimenti intellettuali — L'educazione dei sentimenti e la quistione sociale.

— **La psicologia collettiva.**—(N 27). Un vol. in-16, pag. 158 . . . . 2 50

Importanza sociale della collettività umana e dello studio delle loro manifestazioni psichiche — Sociologia, psicologia sociale e psicologia collettiva — Gli scrittori principali di psicologia collettiva. (Scipio Sighele — Gabriel Tarde — Gustavo Le Bon — Pasquale Rossi). Altri scrittori di psicologia collettiva — Organizzazione scientifica, metodo e utilità della psicologia collettiva — Bibliografia.

SIGHELE (Scipio). **Mentre il secolo muore.** — *Saggi di psicologia contemporanea.* — (N. 4). Un vol. in-16, pag. 367 . . . . 3 —

Psicologia del silenzio (*conferenza*) — Fisiologia del successo — La suggestione nell'arte — La storia è credibile? — La guarigione per mezzo della fede— L'opinione pubblica — Bambini martiri — Bambini selvaggi — Il delitto politico — I Francesi a teatro — « Parigi » di Emilio Zola — Max Nordau e i suoi ultimi libri — La politica dei letterati — La coltura degli uomini politici — Virtù antiche e virtù moderne.

TAORMINA (Giuseppe). **Ranieri e Leopardi.**—*Considerazioni e ricerche con documenti inediti.* — (N. 2). Un vol. in-16, pag. 116. . . . . 1 50

TAROZZI (Giuseppe). **La varietà infinita dei fatti e la libertà morale.** — (N. 28). Un vol. in-16, pagine 144 . . . . 1 50

Avvertenza — La legge costante e la variabilità infinita dei fenomeni sulla coscienza scientifica del tempo nostro — Il positivismo e l' obbiettività del divenire — L'unità del fatto — Finalità, contingenza e fatto. — Il secondo termine dell'ordine causale nella natura e nella coscienza — La scienza come previsione e come esperimento e la libertà morale — La libertà e la legge.

VENTURI (Silvio). **Le pazzie dell'uomo sociale.**— — (N. 15). Un vol. in-16, pag. 263, con ritratto dell'Autore 2 50

Dedica — Prefazione : Ragione e limiti d'una Psichiatria sociale — Le vittime della sensibilità sociale — Le vittime dell'attività sociale — Gli elementi dinamici della attività sociale — Le pazzie sociali acute — Forme costituzionali di pazzia sociale — I delinquenti politici — Criterii di cura artificiosa contro le pazzie dell'uomo sociale.

VIAZZI (Pio). **La lotta di sesso.** — (N. 7). Un vol. in-16, pag. 400 . . . . 3 50

Prefazione — PICCOLA ANTOLOGIA DELL'AMORE — 1. L'importanza dei fatti d'amore—2 .Il dominio d'amore—3. Amore è pazzia—4. Gli stati amorosi sono stati patologici—5. Il misoginismo—6. Conclusione — LA « LOTTA DI SESSO » — 1. Amore e dolore—2. Le riforme embrionali — 3. Il lato psicologico — 4. Il lato sociologico—5. Gli adattamenti — 6. Prostituzione e matrimonio — 7. La solidarietà — 8. Gli episodii — 9. La letteratura femminile—10. I voti—IL PUDORE — 1. Il concetto del pudore — 2. Che cosa è il pudore — 3. Significato psicologico del pudore — 4. I limiti del pudore nell'uomo e nella donna —5. La difesa sociale ed individuale del pudore — APPENDICI: Prossenetismo disinteressato — Atavismo e degenerazione— Il tipo criminale nella donna delinquente.

In preparazione:

CESCA (Giovanni). **Filosofia dell'azione.**

DE SARLO (Francesco) e **CALÒ** (Giovanni). **Principii di scienza etica.**

DRIESCH (Dr. Hans). **Il Vitalismo.** Traduzione autorizzata del Dr. MARIO STENTA, con introduzione del Prof. DAVIDE CARAZZI.

GNOLI (Domenico). **Saggi e studi critici.**

MENASCI (Guido). **La letteratura tedesca contemporanea.**

ORANO (Paolo). **La patria italiana.**

PASCAL (Carlo). **I regni d'oltretomba nell'antichità.**

PORTIGLIOTTI (Giuseppe). **San Francesco d'Assisi** *e le epidemie mistiche del Medio Evo* — Studio psichiatrico.

RIBOT (Teodulo). **La logica dei sentimenti.** Traduzione della Sig.ra SOFIA BEHR.

STRATICÒ (Alberto). **Pedagogja sociale.**

BIBLIOTECA DEI POPOLI
diretta da GIOVANNI PASCOLI

I poemi e gli altri monumenti letterari che sopravvivono immortali ai loro tempi, sono le vestigia che i popoli lasciano nella storia. Il raccoglierli e il divulgarli presso altri popoli, è quasi un rifare la storia del pensiero umano nelle sue più alte manifestazioni.

Il còmpito non agevole è stato assunto da GIOVANNI PASCOLI, il quale è coadiuvato dai più illustri cultori italiani delle letterature antiche o straniere. La *Biblioteca dei Popoli* si arricchisce così delle traduzioni più scrupolosamente curate delle più alte manifestazioni letterarie dei popoli Orientali e dei Greci, corredate da note storiche e critiche, di modo che il lettore ha dinanzi a sè l'opera che lo diletta, nonchè tutte le notizie che ad essa ed all'epoca si riferiscono.

I. **Mahâbhârata.**—Episodi scelti, tradotti e collegati col racconto dell' intero poema. — Traduzione con introduzione e note di PAOLO EMILIO PAVOLINI.— Un vol. in-16, pag. XXXII-315, con 18 illustrazioni, riprodotte dalla edizione bombayana . . . 3 —

Introduzione — Versione e compendio — Note — Indice di nomi — Spiegazione delle figure — Albero genealogico dei Kuruidi e Pánduidi — Elenco dei luoghi tradotti per intero — Errata corrige — Carta geografica dell'India con alcuni nomi rammentati nel Mahâbhârata.

Il miglior elogio dell'opera del Pavolini è quello datone da giudice competentissimo, il KERBAKER *dell'Ateneo di Napoli: « Ora gl' Italiani — egli scrive — possono leggere di questo poema una bella riduzione in*

prosa nel « Mahâbhârata » tradotto e abbreviato dal Prof. Pavolini; libro importante e da gran tempo e da molti desiderato e che raggiunge perfettamente il fine propostosi dal valente sanscritista, di partecipare a tutte le persone che ne abbiano vaghezza, la conoscenza della grande epopea indiana.

II. **ARISTOFANE. Gli Acarnesi.**—Versione poetica, con introduzione e note di ETTORE ROMAGNOLI.— Un vol. in-16, pag. XXV-124 . . . . . . 1 —

. . . . . Ci affrettiamo ad affermare subito che questa fatica del classico poeta Ettore Romagnoli, che già fece la versione poetica degli « Uccelli », presentata al pubblico nientemeno che da Augusto Franchetti, è ben degna della collezione pascoliana . . . . .

. . . . . comprendo che l'originale aristofanese è così possentemente suggestivo, che una traduzione pur mediocre ci può comunicare un non indifferente diletto spirituale, ma questa è così felicemente viva e svelta, che sembra un'opera d'invenzione.

(Da la **Rivista bibliografica,** 1 Aprile, 1904).

III. **ESCHILO. Il « Prometeo incatenato ».**—*Frammenti del « Prometeo liberato ».*—Versione, proemio e note di MARIO FUOCHI. — Un vol. in-16, pag. LXXV-147, con 15 illustrazioni (riproduzioni di monumenti figurati antichi pertinenti ai miti di Prometeo e di Io) 2 50

. . . . Dottrina e diligenza abbiamo constatato con piacere non solo nella traduzione, ma nel diffuso Proemio e nelle note preliminari ad ogni scena . . . .

(Da la **Rassegna Bibliografica della letteratura italiana).**
(Novembre, 1903).

Il Fuochi ha avuto la mano felice non meno dei suoi colleghi nello scegliere per la « Biblioteca dei popoli », fra le tragedie di Eschilo, il Prometeo, che è certo il più popolare, dirò così, dei drammi del grande tragico e quello che può interessar di più un lettore moderno . . . .

(Dal **Bollettino di filologia classica,** Settembre, 1903).

. . . . La prosa di Mario Fuochi, nervosa o pacata, agile o solenne, ci pare singolarmente temprata a rendere i lampeggiamenti dell' aspra tragedia eschilea . . . .

(Da **La Cultura,** Settembre, 1903).

IV. **Nagananda o il giubilo dei Serpenti.**—*Dramma buddistico.* — Traduzione, prefazione e note di

FRANCESCO CIMMINO. — Un vol. in-16, pag. LXIII-167 . . . . 2 —

L'opera d'arte serve, più di qualunque esposizione teorica, a far comprendere una dottrina, e questo poema drammatico buddistico ci mostra nella sua realtà storica e psichica l'ambiente in cui germogliò e si svolse l'immortale pensiero di Siddarta Sakia.

V. **Canti popolari greci**, tradotti ed illustrati da NICCOLÒ TOMMASEO, con copiose aggiunte ed una introduzione per cura di PAOLO EMILIO PAVOLINI. — Un vol. in-16, pag. 200. . . . . 2 50

Introduzione — Canti cleftici — Canti storici — Canti familiari — Canti per Caronte — Ballate e Romanze — Canti d'amore — Distici.

L'anima greca, in questi canti che oggi non sono conosciuti che dagli eruditi, si rivela con nuova luce, e permette di intravedere tutto il processo estetico e morale che nella espressione dell'arte popolare degli Elleni permetteva la manifestazione del pensiero della razza immortale, che doveva sopravvivere al suo tempo, nelle sue opere letterarie.

La presente raccolta offre in traduzione italiana 159 canti popolari di vario genere e 188 distici. La raccolta del Tommaseo (Venezia 1841) forma il nucleo, una serie di altri canti, tratti da opere recenti, aggiunse il Pavolini, con un indice comparativo, che facilita il confronto degli originali greci (Passow ed altre edizioni).

Alle annotazioni illustrative del Tommaseo, le quali chiariscon gli intendimenti estetici ed i soggetti dei canti, fan seguito le osservazioni del Pavolini sulla recente letteratura e sulla filologia greca.

La breve introduzione del Pavolini, rallegandosi all'eccellente giudizio del Fauriel offre uno studio fine e ben esposto della moderna poesia popolare greca.

L'accurata scelta raggiunge lo scopo di render noto ai lettori italiani la bellezza e l'originalità del canto popolare greco. Interesseranno in special modo lo studioso i distici, tradotti da una raccolta inedita posseduta da Domenico Comparetti e tradotti da Samos, Ikaros e Kalymnos.

(Dalla **Deutsche Literaturzeitung** di Lipsia, n. 42, Ottobre 1905).

VI. **Il canto divino (Bhagavad-gîtâ)**, tradotto e commentato da ORESTE NAZARI. — Un vol. in-16, pag. VIII-140 . . . . 1 50

Il poema filosofico religioso, del quale qui diamo la versione, è la

sta edizione tedesca, di F. FEDERICI.— (N. 54). Un vol. in-16, pag. 632 . . . . 4 —

Prefazione alla 25ª edizione. — Prefazione alla 34ª edizione. — Introduzione. — LA DONNA NEL PASSATO — LA DONNA NEL PRESENTE — La donna come essere sessuale — Il matrimonio — Ostacoli e freni al matrimonio — Altri freni e impedimenti al matrimonio — Proporzione numerica dei sessi — Cause ed effetti — La prostituzione come istituzione sociale necessaria alla borghesia — La posizione della donna nelle industrie — Le sue capacità intellettuali. Il darwinismo e le condizioni della società — La posizione giurdica e politica della donna — Stato e Società — LA DONNA NELL'AVVENIRE. L'internazionalismo — Popolazione ed eccesso di popolazione — Conclusione.

BONOMI (Ivanoe). **La finanza locale e i suoi problemi.** — (N. 44). Un vol. in-16, pag. 352 . . 3 —

Prefazione. — ESAME CRITICO DELLA FINANZA LOCALE — L'azione dello Stato nella finanza locale — Il sistema tributario dei Comuni — *a)* Imposte reali immobiliari — *b)* Imposte reali mobiliari — *c)* Imposte dirette personali — *d)* Imposte dirette sui Comuni — *e)* Imposte varie — *f)* Tasse e diritti — LE LINEE FONDAMENTALI DI UNA RIFORMA — I criteri scientifici — La finanza locale nei principali paesi d'Europa — La riforma dei tributi locali in Italia — Le nuove forme di tassazione — Municipalizzazione dei pubblici servizi — L'incremento di valore delle aree edilizie — Contributi speciali per i lavori di miglioria. — GLI INDIRIZZI ODIERNI DELLA FINANZA LOCALE — Le riforme tentate dai Comuni — L'opera riformatrice della legge — Conclusione.

BUONVINO (Orazio). **Il giornalismo contemporaneo.** — *L' istituto sociale della stampa pubblica.* — *Lo sviluppo dell' industria giornalistica.* — *Statistica della stampa periodica fino al 1905,* con oltre 100 tavole e quattro grafici a cromolitografia (3 diagrammi e 1 nastrogramma).—(N. 58). Un vol. in-16, pag. 615 . . . . 5 —

Introduzione — Complessità del fenomeno giornalistico — Il problema giornalistico nelle sue linee generali — Indagini statistiche sul giornalismo. — Tendenze del fenomeno — Statistica della stampa periodica italiana fino al 1905.

CHIAPPELLI (Alessandro). **Voci del nostro tempo.** — *Saggi sociali.* — (N. 43). Un vol. in-16, pag. 359 . . . . 3 —

Dedica. — Prefazione — Sul confine dei due secoli — I doveri sociali delle classi superiori e le nuove trasformazioni del socialismo — Il mare e la civiltà — Musica, metafisica e religione — La società «Dante Alighieri» e la coscienza nazionale — L'Italia d'oggi (a proposito di due libri recenti) — Le nuove trasformazioni del radicalismo e del socialismo in Italia — Leone Tolstoi e i presenti moti di Russia — L'ultima parola di Herbert Spencer - Problemi moderni.

COLAJANNI (Napoleone). Deputato al Parlamento. **Gli avvenimenti di Sicilia e le loro cause,** con prefazione di MARIO RAPISARDI. Seconda edizione. — (N. 4). Un vol. in-16, pag. 507 . . . . . 2 —

Prefazione — Prime armi del socialismo in Sicilia — Forze del socialismo — Il programma. I risultati. Le accuse — Le cause. Il malcontento in alto — Il malcontento tra i lavoratori delle miniere — Le classi rurali — I paria della terra — Il latifondo — Rapida depressione economica — Organizzazione sociale e rapporti tra le varie classi — I partiti in lotta e le amministrazioni dei corpi locali — L'odio di classe — Nulla è mutato! — Facili presagi — Provocazione e preparazione ai tumulti — La repressione — Le responsabilità. *a)* Il Clero — Le responsabilità. *b)* I fasci — Le responsabilità. *c)* Il governo — La reazione — I tribunali militari — Il processo mostruoso — L'opera civile del generale Morra — La discussione parlamentare — Conclusione.

CROCE (Benedetto). **Materialismo storico ed economia marxistica.** — *Saggi critici* — Seconda edizione con l'aggiunta di nuovi saggi sul principio economico — (N. 32). Un vol. in-16, p. 316 . . 4 —

Prefazione. — Avvertenza alla seconda edizione — DELLA STORIOGRAFIA — SULLA FORMA SCIENTIFICA DEL MATERIALISMO STORICO — LE TEORIE STORICHE DEL PROF. LORIA — PER LA INTERPRETAZIONE E LA CRITICA DI ALCUNI CONCETTI DEL MARXISMO — 1. Del problema scientifico del Capitale del Marx — 2. Il problema del Marx e l'economia pura (scienza economica generale) — 3. Della circoscrizione della dottrina del materialismo storico — 4. Della conoscenza scientifica di fronte ai problemi sociali — 5. Del giudizio etico di fronte ai problemi sociali — Conclusione — IL LIBRO DEL PROF. STAMMLER — RECENTI INTERPRETAZIONI DELLA TEORIA MARXISTICA DEL VALORE E POLEMICHE INTORNO AD ESSE — UN' OBIEZIONE ALLA LEGGE MARXISTICA DELLA CADUTA DEL SAGGIO DEL PROFITTO — MARXISMO ED ECONOMIA PURA — DELLA STORIOGRAFIA SOCIALISTA. Il Comunismo di Tommaso Campanella. A proposito di recenti pubblicazioni. — SUL PRINCIPIO DELL'ECONOMIA PURA. Due lettere al prof. Vilfredo Pareto — IL GIUDIZIO ECONOMICO ED IL GIUDIZIO TECNICO. Osservazioni ad una memoria del prof. Gobbi — ECONOMIA FILOSOFICA ED ECONOMIA NATURALISTICA.

CUTRERA (Antonino). **Storia della prostituzione in Sicilia.** Monografia storico-giuridica con documenti inediti e piante topografiche della città di Palermo — (N. 62). Un vol. in-16, pag. 228 . 2 50

Periodo greco e romano — La prostituzione ed il costume nel periodo normanno, svevo ed aragonese (dal secolo XI al secolo XIV) — Il Quattrocento — Il Cinquecento — Il Seicento — Il Settecento — Conclusione.

DE FELICE (Giuseppe). Deputato al Parlamento. **Prin-**

cipii di sociologia criminale. — *Criminalità e socialismo.* — (N. 42). Un vol. in-16, pag. 143 . 1 50

IL DIRITTO DI PUNIRE — La Società e il diritto di punire — Cenni sull'evoluzione e sull'efficacia della pena — La teoria dell'incorreggibilità — Effetti fisiologici di un lieve cambiamento sociale — L'AMBIENTE SOCIALE E IL DELITTO — Bilancio del delitto e bilancio del lavoro. I fattori sociali del delitto — L'ambiente criminoso — Il Socialismo e la delinquenza — Opere consultate.

DE GREEF (Guglielmo). **Regime parlamentare e regime rappresentativo.** — (N. 14). Un vol. in-16, pag. 80. . . . . 1 —

DE MARINIS (Errico). Deputato al Parlamento. **Le presenti tendenze della società e del pensiero e l'avvenire.** — (N. 16). Un volume in-16, pag. 64, L. 1. (esaurito).

DEMOLINS (Edmondo) e **SQUILLACE** (Fausto). **Il popolo meridionale.** — *Saggi di Geografia sociale.* — (N. 53). Un vol. in-16, pag. XI-121 . . . . . 2 50

La Sociogeografia e la questione meridionale — La via della penisola italiana — 1. Il tipo creato dalle città commerciali — 2. Il tipo creato dalla montagna — 3. La influenza dei conquistatori stranieri. — Appendici (A. B. C.)—Note.

ENGELS (Federico). **Il socialismo scientifico contro Eugenio Dühring.** Traduzione, sulla terza edizione tedesca, di SOFIA PURITZ, con introduzione di E. BERNSTEIN e prefazione di ENRICO FERRI.— (N. 30). Un vol. in-16, pag. 352 . . . . . . 3 —

Prefazione — INTRODUZIONE DI E. BERNSTEIN — Eugenio Dühring e il partito socialista tedesco — Lo scritto di Engels come libro didascalico del socialismo — Conclusione — IL SOCIALISMO SCIENTIFICO CONTRO E. DÜHRING — Generalità — Che cosa promette il signor Dühring — FILOSOFIA — Divisione. Apriorismo — Lo schematismo del mondo — Filosofia naturale. Tempo e spazio — Filosofia della natura. Cosmogonia, fisica, chimica — Filosofia della natura. Mondo organico — Filosofia della natura. Mondo organico. (Conclusione) — Morale e diritto. Verità eterne — Morale e diritto. Eguaglianza — Morale e diritto. Libertà e necessità — Dialettica. Quantità e qualità — Dialettica. Negazione della negazione — Conclusione — ECONOMIA POLITICA — Soggetto e metodo — Teoria del potere — Teoria del potere (Continuazione) — Teoria del potere (Conclusione) — Teoria del valore — Lavoro semplice e lavoro composto — Capitale e plusvalore — Capitale e maggior valore (Conclusione) — Leggi naturali della economia. Rendita fondiaria — Dalla « Storia critica » — SOCIALISMO — Storia — Teorica — Produzione — Distribuzione — Stato, famiglia, educazione.

FACCHINI (Cesare). **Degli eserciti permanenti.** Seconda edizione italiana. — (N. 37). Un vol. in-16, pag. 188 . . . . 2 —

Dell'origine degli eserciti permanenti — Delle opinioni su l'origine degli eserciti permanenti — Delle assemblee rappresentative del medio evo e della loro abolizione — Come gli eserciti permanenti violino continuamente la legge della produzione e della distribuzione della ricchezza — Dell'ambizione e degli interessi dinastici e della paura e dell'egoismo delle classi abbienti e dirigenti come cause della permanenza degli eserciti — Come senza disciplina non sia possibile esercito e come senza esercito permanente non sia possibile disciplina — Della nazione armata basata su la ferma di un anno — Delle cause dell'aumento degli eserciti permanenti — Come nelle presenti condizioni d'Europa la guerra sarebbe più funesta di quello che è, ove fosse combattuta da milizie simili a quelle che combatterono la guerra di secessione degli Stati Uniti d'America — Conclusione.

FERRARI (Celso). **La nazionalità e la vita sociale.**— (N. 13). Un vol. in-16, pag. VIII-388 . . . 3 —

Dedica — Prefazione — Introduzione — La Nazione — Territorio e Razza — I prodotti della vita sociale — La famiglia e lo scopo dell'organizzazione sociale— La nazionalità — Definizione della nazionalità — La nazionalità e la volontà individuale — La nazionalità e il diritto pubblico — Conclusione.

— **Nazionalismo e Internazionalismo.** *Saggio sulle leggi statiche e dinamiche della vita sociale.*—(N. 59). Un vol. in-16, pag. VIII-278 . . . . 3 —

Dedica — Introduzione — La Famiglia — La nazione antica — La città — La Nazione moderna — Effetti del nazionalismo — L'Internazionalismo — Conclusione.

FERRARIS (Carlo Fr.). Deputato al Parlamento. **Il materialismo storico e lo Stato.** Seconda edizione riveduta nel testo e ampliata con note e coll'aggiunta di un'appendice sulla Statistica delle professioni e delle classi.— (N. 17). Un vol. in-16, pag. 143. 3 —

Il materialismo storico e lo Stato — La teoria del materialismo storico— Il materialismo storico e i fenomeni sociali e religiosi — Il materialismo storico e le forze dello Stato. La finanza. L'Esercito. La Gerarchia civile — Il materialismo storico e la forma dello Stato — Il materialismo storico e l'azione sociale dello Stato.

Appendice : Professioni e classi e loro rivelazione statistica — Le professioni e loro rilevazione statistica — Le classi e loro rilevazione statistica — Bibliografia.

— **La teoria del decentramento amministrativo.** Seconda edizione, riveduta nel testo ed accresciuta

con nuovi Saggi. — (N. 25). Un volume in-16, pagine 143 . . . . 1 50

TEORIA DEL DECENTRAMENTO AMMINISTRATIVO — La terminologia e i limiti della trattazione — Il decentramento gerarchico — Il decentramento autarchico — APPENDICE: La regione amministrativa — Elettorato ed eleggibilità nel Comune

FERRI (Enrico). Deputato al Parlamento. **Discordie positiviste sul socialismo.** *(Ferri contro Garofalo)* Seconda edizione.—(N. 8). Un vol. in-16, pag. 84. 1 —

GATTI (Girolamo). Deputato al Parlamento. **Agricoltura e socialismo.**—*Le nuove correnti dell'economia agricola.* — (N. 29). Un vol. in-16, pag. 516 . 4 —

Dedica — Prefazione — PRODUZIONE AGRICOLA — Ruralismo — Aspirazioni e realtà — Volontà umane e produzione agricola — Ambiente sociale e biologico ed agricoltura — Sorgenti prime — TENDENZE TECNICHE ED ECONOMICHE DELL' AGRICOLTURA — Progresso tecnico dell'agricoltura — Vecchio e nuovo strumento tecnico produttivo — Le due correnti economiche determinate dal nuovo strumento tecnico agricolo — Carattere sociologico delle due correnti economiche: capitalismo agricolo e cooperativismo agricolo — L'avvenire del capitalismo e del cooperativismo agricolo — PARTITO SOCIALISTA E CLASSI AGRICOLE — Proprietà fondiaria e partito socialista — Piccola proprietà fondiaria e socialismo in Italia — Proletariato agricolo — Azione agraria dei socialisti nei Comuni e nel Parlamento — Socialismo agrario.

GIUDICE (Antonino). **Il Valore o le fondamenta scientifiche del Socialismo.**— (N. 31). Un vol. in-8, pag. 152. — L. 2 (esaurito).

GUYOT (Yves). **La Tirannide socialista.** Traduzione, prefazione e note di F. CIOTTI. — (N. 1). Un vol. in-16, pag. 284 . . . . 1 50

Prefazione del Traduttore — Introduzione — L'evoluzione ed il regresso — Sofismi socialisti — L'attuazione dei sofismi socialisti — La morale e legalità socialiste — Gli scioperi e la guerra sociale — Le responsabilità — Conclusione.

— **I principii dell'89 e il socialismo.** Traduzione con appunti e note di B. LA MANNA. — (N. 2). Un vol. in-16, pag. 247 . . . . 1 50

Prefazione del Traduttore — Prefazione dell'Autore — Pregiudizii e principii — I principii del 1789 — I principii dell'89 e le dottrine socialiste — L'individualismo e il socialismo — APPENDICE: Dichiarazione dei diritti dell'uomo 26 agosto 3 novembre 1789.

HAMON (Agost.). **Psicologia del militare di professione.** Nuova versione italiana di C. FRIGERIO — (N. 39). Un vol. in-16, pag. 261 . . . . 2 50

Qualche parola di prefazione — Dedica — Introduzione — Generalità — Scopo del professionista nella carriera militare — Esercizio del mestiere militare — Effetti della professione sulla mentalità de' suoi membri — Disprezzo della vita umana e delle sofferenze fisiche — Brutalità fuori del campo professionale. — Grossolaneria dentro e fuori della professione — Altre manifestazioni dello spirito militare — Sessualità — Delinquenza legale ed immoralità — Conclusioni — La difesa della psicologia del militare di professione.

JAURÈS (Giovanni). **Studi socialisti.** Traduzione e prefazione di GARZIA CASSOLA — (N. 49). Un vol. in-16, pag. 362 . . . . 3 —

Prefazione del Traduttore — Il socialismo italiano — Introduzione — Questione di metodo — PREFAZIONE — Repubblica e socialismo — IL MOVIMENTO RURALE — Il movimento rurale — Lenti abbozzi — REVISIONE NECESSARIA — Revisione necessaria — EVOLUZIONE NECESSARIA — In cinquant'anni — Maggioranze rivoluzionarie — Parole di Guglielmo Liebknecht — Guglielmo Liebknecht e la tattica — « Allargare, non restringere » — Il socialismo e i privilegiati — Le ragioni di maggioranza — Sciopero generale e rivoluzione — IL FINE — IL SOCIALISMO E LA VITA — DELLA PROPRIETÀ INDIVIDUALE — I radicali e la proprietà individuale — Proprietà individuale e Codice borghese — La proprietà individuale e i tributi — La proprietà individuale e il diritto di successione — La rivoluzione francese ed il diritto di successione — La proprietà individuale e le leggi borghesi di espropriazione — La proprietà individuale e le società di commercio — Proprietà individuale e società anonime.

LABRIOLA (Arturo). **La teoria del valore di Carlo Marx.**—*(Studio sul III libro del* **Capitale**).—(N. 27). Un vol. in-16, pag. 296. . . . . 3 —

Introduzione: LA POSIZIONE DI MARX NELL'ECONOMIA POLITICA — IL COSTO CAPITALISTICO — Il mercato e la concorrenza — Influenza del profitto sulla produzione — I problemi del profitto — IL PROBLEMA DEL VALORE — Il valore — Il prezzo di produzione — Formazione storica del prezzo di produzione — La distribuzione del plusvalore e la produttività-valore del lavoro — LA LEGGE DELLA CADUTA DEL SAGGIO DEL PROFITTO — La legge del valore e la legge della caduta del saggio del profitto. — La depressione industriale — La legge della decrescenza del saggio del plusvalore — Conclusione.

LAFARGUE (Paolo). **L'origine e l'evoluzione della proprietà,** con introduzione critica di ACHILLE LORIA. — (N. 12). Un vol. in-16, pag. 396 . . . 2 —

Introduzione di ACHILLE LORIA — LE FORME DELLA PROPRIETÀ CONTEMPORANEA: Classificazione delle forme della proprietà — La proprietà derivante dall'approvazione individuale — Proprietà-strumento di lavoro — Proprietà-capitale —

Metodo — IL COMUNISMO PRIMITIVO: Origine della proprietà individuale — Comunismo della «gens» — Abitazione e pasti comuni — Costumi comunisti — Proprietà comune delle terre — Origine della divisione del lavoro — Coltivazione in comune della terra — Proprietà comune dei beni mobiliari — IL COLLETTIVISMO CONSANGUINEO: Frazionamento della «gens» in famiglie matriarcali e patriarcali— Proprietà consanguinea collettiva — Origine della proprietà individuale della terra — Origine della giustizia e del furto — Caratteri della proprietà collettiva — Comunanze di contadini — Frazionamento della proprietà collettiva — LA PROPRIETÀ FEUDALE: L'organizzazione feudale — Origine della proprietà feudale — Origine della proprietà ecclesiastica — Carattere delle servitù feudali — Modi di ingrandimento della proprietà feudale — Servitù della proprietà feudale — LA PROPRIETÀ BORGHESE: Origine del commercio — Piccola industria e piccolo commercio individualisti — L'opificio — L'agricoltura capitalistica — L'industria e il commercio capitalistico — La finanza capitalistica — Il collettivismo capitalistico.

LAFARGUE (Paolo). **Capitale** (Estratti del) v. *Marx.*

LEONE (Enrico). **Il Sindacalismo.** — (N. 61). Un vol. in-16, pag. 224 . . . . 2 50

Prefazione — La soluzione «sindacalista» della crisi del socialismo — Che cosa è il Sindacalismo — Il divenire sociale secondo il Sindacalismo — L'economia del lavoro — APPENDICE.

LERDA (Giovanni). **Influenza del Cristianesimo sull'economia.**—*Note ed appunti.* — (N. 24). Un vol. in-16, pag. 144 . . . . 1 —

Prefazione — Introduzione — Condizioni dell'Impero Romano — Le origini del Cristianesimo — Altri fattori di riforma economica e morale nella società dell'Impero — I primi secoli della Chiesa — La Chiesa contro il Cristianesimo — Monachismo — Millennio — Schiavitù — Conclusione: Tentativo di una bibliografia del Cristianesimo

LOMBROSO (Cesare). **La funzione sociale del delitto.** Terza edizione. — (N. 15). Un vol. in-16, pag. 31. L. 0,50. (Esaurito)

LORIA (Achille). **Marx e la sua dottrina.** —(N. 41). Un vol. in-16, pag. 272. . . . . 2 —

Al lettore — Karl Marx — L'opera postuma di Carlo Marx — Intorno ad alcune critiche dell'Engels — Due parole di anticritica — Le vicende del marxismo in Russia — Serate socialiste a Londra nel 1882.

— **Il movimento operaio.** — *Origini. Movimento. Sviluppo* — (N. 47). Un vol. in-16, pag. 320 . . 2 —

UNIONISMO — Origini del movimento unionista — Fini del movimento unionista — Metodi del movimento unionista — Efficacia del movimento unionista — Sviluppo del movimento unionista ne' principali Stati — COOPERAZIONE — Effica-

cia della cooperazione — SOCIALISMO — Gli operai ed il Socialismo — Valore sociale del movimento operaio.

LO VETERE (Filippo). **Il movimento agricolo siciliano.** — (N. 48). Un vol. in-16, pag. 190 . 1 —

MARX (Carlo). **Il Capitale.** Estratti di PAOLO LAFARGUE, con introduzione critica di VILFREDO PARETO e replica di PAOLO LAFARGUE. Terza edizione. — (N. 3). Un vol. in-32, pag. 340, con ritratto. 3 —

Biografia di Carlo Marx — Introduzione di Vilfredo Pareto — MERCE E MONETA: La merce — Degli scambi — Circolazione delle merci — LA TRASFORMAZIONE DEL DENARO IN CAPITALE — La formola generale del Capitale — Contraddizioni della formola generale del Capitale — Compra e vendita della forza di lavoro — Produzione di valori d'uso e produzione del plus-valore — Capitale costante e capitale variabile — Il tasso del plus-valore — Note di Paolo Lafargue— Avvertenza dell'Editore — APPENDICE. Contro-introduzione di Paolo Lafargue.

MODIGLIANI (G. E.). **La fine della lotta per la vita tra gli uomini.**—*Saggio.*—(N. 33). Un vol. in-16, pag. 190 . . . . 2 —

Prefazione — Individualisti e socialisti davanti al darwinismo sociale — Critica delle loro opinioni e ipotesi che deriva dalla critica — La teoria organica criticata e corretta — Il criterio positivo per la dimostrazione dell'ipotesi — I vinti della lotta per la vita non fanno parte degli enti superorganici — Elisione progressiva della lotta per la vita fra gli uomini.

MORASSO (Mario). **Contro quelli che non hanno e che non sanno.** — (N. 26). Un vol. in-16, pag. 371 . . . . 4 —

Prefazione — La formazione dei due partiti estremi. Il conservatorismo individualistico e il socialismo parlamentare — L'antimilitarismo. La democrazia contro la corporazione militare — La propaganda antimilitaristica — L'origine e il carattere dello sciopero. Dov'è l'atavismo? — La democrazia contro la giustizia — L'indebolimento della funzione penale — Altre ragioni di indebolimento — Le difese della democrazia contro il delitto. La speranza della impunità — La delinquenza odierna. Forme e caratteri — La democrazia contro l'istruzione — La più bella illusione della democrazia — La democrazia contro l'insegnamento classico. Ginnastica e sport al posto del latino e del greco — Il feminismo. La democrazia contro il piacere sessuale. L'imbarbarimento della donna — La democrazia contro il dinamismo nazionale — Conclusione.

MORSELLI (Enrico). **La pretesa " bancarotta della scienza ,,.** — *Una risposta.* — (N. 5). Un fasc. in-8, pag. 24 . . . . — 50

NASI (Nunzio). **Politica estera — Commissariato civile in Sicilia.**—*Discorsi alla Camera dei Deputati* con prefazione di G. PIPITONE FEDERICO.—(N. 35). Un vol. in-16, pag. 54 . . . . 1 —

NICEFORO (Alfredo). **La delinquenza in Sardegna.**—*Note di sociologia criminale,* con prefazione di ENRICO FERRI. — (N. 19). Un vol. in-16, pag. 208, con 9 tavole grafiche . . . . 2 —

Prefazione — La fisonomia criminale della Sardegna — Fattori individuali. Il senso morale — Fattori individuali. L'aggressività — Fattori individuali. La razza e il temperamento etnico — Fattori d'ambiente. La viabilità e la criminalità. — Fattori d'ambiente. Lo stato giuridico delle terre — Fattori d'ambiente. L'amministrazione della giustizia e la pubblica sicurezza. — APPENDICE.

— **L'Italia barbara contemporanea.** — *Note ed appunti sull' Italia del Sud.* — (N. 22). Un vol. in-16, pag. 322 . . . . 2 —

Dedica — Al lettore — La vita sociale nel Sud-Italia — Il delitto — La diffusione della cultura — La natalità — La mortalità e il suicidio — La vita economica — La Sardegna — La Sicilia — Il mezzogiorno — Le due Italie — La decadenza attuale.

NOVICH (Bertha). **Maternità e lavoro.** A cura del Dr. A. ROSTER. — (N. 64). Un vol. in-16, pag. IV. 344 . . . . 3 50

Prefazione — Lettori e lettrici — Dal giardino zoologico di Praga al quinto anno di Università — Il sentimento della maternità — Operaia della specie — I prodotti secondarii della maternità — Attività femminile — Casa e lavoro — La famiglia operaia — Il valore dell'operaia — La legge del 7 luglio 1902 sul lavoro delle donne e dei fanciulli — Effetti del lavoro precoce—Effetti dell'eccesso di lavoro — I pericoli della maternità e del lavoro—La strage degli innocenti—La tutela delle gestanti e delle puerpere — Per una Cassa di maternità — Proposte — Riepilogo.

NOVICOW (Giacomo). **Coscienza e volontà sociali.** Traduzione dell'AVV. G. CAPPONI TRENCA.—(N. 21). Un vol. in-16, pag. 371. L. 3 (esaurito).

La teoria organica della società — La coscienza individuale e la coscienza sociale — Il sensorio sociale — Proporzione numerica dell'eletta — Il mezzo strumentale intellettuale — Il meccanismo della coscienza sociale — Le funzioni dell'eletta sociale — L'azione riflessa — L'azione sociale — Il ciclo del fenomeno psichico — Errori dei metodi attuali di apostolato — La sensibilità sociale e la giustizia — Rapidità delle volizioni sociali — Limite delle volizioni nello spazio. Il patriottismo — Patologia dell'organo sensorio — Successione e durata delle volizioni sociali — Volizioni economiche — Volizioni politiche — Volizioni intellettuali — Le volizioni dell'avvenire — Conclusione.

PANTALEONI (Maffeo). **Scritti varii di economia.** — (N. 51). Un vol. in-16, pag. 530 . . . . . 4 —

Prefazione — Del carattere delle divergenze d'opinione esistenti tra economisti — Contributo alla teoria del riparto delle spese pubbliche — Teoria della pressione tributaria — Esame critico dei principii teorici della cooperazione — Cenni sul concetto di massimi edonistici individuali e collettivi — Tentativo di analisi del concetto di «forte e debole» in Economia — Nota sui caratteri delle posizioni iniziali e sull'influenza che le posizioni iniziali esercitano sulle terminali — Osservazioni sulla semiologia economica — Dei criteri che debbono informare la storia delle dottrine economiche — APPENDICE: A proposito di Luigi Cossa e della sua « Histoire des doctrines économiques ».

PUVIANI (Amilcare). **Teoria della illusione finanziaria.** — (N. 46). Un vol. in-16, pag. 301 . . 2 —

Al lettore. — Dell'illusione politica in generale — L'illusione finanziaria — Occultamento di masse di ricchezza requisita in relazione alle singole fonti di questa — Occultamenti nella quantità, qualità e durata delle spese e delle entrate pubbliche in sede di bilancio — Occultamento nella qualità, quantità e durata delle spese e delle entrate pubbliche in sede di bilancio — Illusioni dipendenti dal collegamento dell'imposta a piaceri d'origine privata del contribuente — Servigi pubblici speciali ingranditi da godimenti di origine privata i quali attenuano il peso dell'imposta — Illusione finanziaria scaturente dal contrapporsi di un male maggiore evitabile al male minore dell'imposta — Illusione finanziaria mediante associazione delle pene delle imposte fra loro e con altre pene — Illusione dipendente dalla dissociazione della ricchezza requisibile — Illusione sulla persona — L'illusione finanziaria nelle varie classi sociali — L'illusione finanziaria nel suo sviluppo storico — Le cause dell'illusione finanziaria — APPENDICE.

RENDA (Antonino). **La questione meridionale.** ***Inchiesta.*** — (N. 36). Un vol. in-16, pag. 229 . . 2.

L'inchiesta — Introduzione — Questionario — Risposte di C. Lombroso, L. Ferriani, A. Loria, *rerum scriptor*, G. Marchesini, A. Groppali, S. Sighele, G. Ferrero, B. Alimena, M. Puglisi Pico, N. Colajanni, F. Puglia, P. Rossi, D. Ruiz, E. Troilo, F. Montalto, G. Sergi, S. Venturi, E. De Marinis, M. Pilo, F. Squillace, A. De Bella, F. Paternostro, V. Giuffrida, E. Ciccotti, Fancello, De Gennaro — APPENDICE.

RESTIVO (Francesco Empedocle). **Il Socialismo di Stato** *dal punto di vista della filosofia giuridica.* — (N. 34). Un vol. in-16, pag. 404 . . . . . 2 —

Lettera-prefazione all'on. Gallo. — Le dottrine contrarie al socialismo di Stato— Socialismo di Stato utopistico e Socialismo di Stato scientifico — I precedenti del Socialismo di Stato — Critiche sistematiche all'azione sociale dello Stato — APPENDICE.

RIGNANO (Eugenio). **La Sociologia nel corso di filosofia positiva di Augusto Comte.** — (N. 52). Un vol. in-16, pag. 124. . . . . 1 —

RIGHINI (Eugenio). **Antisemitismo e semitismo** *nell'Italia politica moderna.* — (N. 38). Un vol. in-16, pag. 366 . . . . 3 —

Cinque paragrafi di prefazione — PREMESSE GENERALI — Incoerenze dei sentimenti e dei ragionamenti — Attrazione e ripulsione, avversione e differenziazione — GLI EBREI NELL'ITALIA MODERNA — Caratteri esterni — Caratteri intellettuali — Coraggio personale e coraggio civile — Caratteri psicologici — Commercio— Avarizia ed usura — Pregiudizi — Semitismo — Antisemitismo — ALCUNE QUISTIONI POLITICHE — Lotte etniche e socialismo — Il Socialismo in Italia — Collettivismo e patriottismo — Cattolici e Clericali: Intransigenti e Intolleranti — Ragione dei precedenti capitoli — GLI EBREI NELLA POLITICA ITALIANA — Gli ebrei prima della rivoluzione — Gli ebrei dopo la rivoluzione — Gli ebrei nei primi anni del Regno — Gli ebrei: il Socialismo — Interesse — Pensiero — Sentimento — Massoneria — Massoneria, ebrei e clericali — Importanza degli ebrei — CONCLUSIONE.

SOMBART (Werner). **Socialismo e movimento sociale nel secolo XIX,** con un'Appendice: *Cronaca del movimento sociale dal 1750 al 1896.* — (N. 23). Un vol. in-16, pag. 175 . . . . 1 50

Donde viene e dov'è diretto? — Del socialismo utopistico — Dalla preistoria del movimento sociale — La formazione delle caratteristiche nazionali — Carlo Marx — La tendenza all'unità — Correnti del presente — Ammaestramenti — APPENDICE.

SOREL (Giorgio). **Saggi di critica del marxismo,** pubblicati per cura e con prefaz. di VITTORIO RACCA — (N. 45). Un vol. in-16 pag. XLVIII-402 . 3 50

Dedica — Prefazione — Bibliografia degli scritti di Giorgio Sorel — Introduzione — Osservazioni intorno alla concezione materialistica della storia — La necessità e il fatalismo nel marxismo — L'influenza delle razze — Le spiegazioni economiche — Vi è dell'utopia nel marxismo? — Marxismo e scienza sociale — Le idee giuridiche nel marxismo — I tre sistemi storici di Marx — Bernstein e Kautsky— Lo sviluppo del capitalismo — Prefazione al « Socialismo » di Colajanni.

— **Insegnamenti sociali della economia contemporanea.** — *Degenerazione capitalista e degenerazione socialista.* — Edizione originale italiana, a cura e con prefazione di VITTORIO RACCA.— (N. 60). Un vol. in-16, pag. XXXII-398 . . . . 3 50

Prefazione di VITTORIO RACCA — Avvertimento ai lettori — Introduzione — Idee socialistiche e fatti economici dalla Rivoluzione francese fino a Marx — Le vecchie utopie e le nuove dottrine socialiste — I *cartells* e le loro conseguenze ideologiche — Conclusione.

SQUILLACE (Fausto). **La base economica della questione meridionale.** — (N. 55). Un volume in-16 pag. 212-LVI . . . . 3 —

La questione meridionale — I programmi economici — I programmi regionali — Il problema agrario — Gli aspetti del problema agrario nel mezzogiorno — Problemi complementari — La legislazione speciale — Appendici — Bibliografia.

— **Dizionario di sociologia** (contenente circa 350 vocaboli e 150 nomi di Autori)—(N. 57). Un vol. in-16, di pag. 119-XXIV . . . . 2 —

— v. *Demolins e Squillace.*

SPENCER (Herbert). **Istituzioni domestiche.** Traduzione di FERIDA FEDERICI, riveduta da FELICE TOCCO. — (N. 18). Un vol. in-16, pag. 303. . 3 —

La conservazione della specie — I diversi interessi della specie, dei genitori, della progenie — Primitive relazioni dei sessi — Esogamia ed endogamia — Promiscuità — Poliandria — Poliginia — Monogamia — La famiglia — La condizione della donna — La condizione dei figliuoli—Il passato e l'avvenire della famiglia—Citazioni — Titoli delle opere citate.

— **Istituzioni cerimoniali.** Traduzione di FERIDA FEDERICI, riveduta da FELICE TOCCO. — (N. 20) Un vol. in-16, pag. 303 . . . . 1 —

Delle cerimonie in generale — Trofei —Mutilazioni—Regali —Visite — Saluti— Presentazione — Titoli — Insegne e vestiti — Ulteriori distinzioni di classe — Moda — Passato e avvenire della cerimonia—Citazioni—Titoli delle opere citate.

STARKENBURG (Heinz). **La miseria sessuale dei nostri tempi.** Traduzione, prefazione e note di L. F. P. Seconda edizione.—(N. 11). Un vol. in-16, pag. 220 . . . . 1 50

L'istinto sessuale — La separazione sistematica dei sessi — La maldicenza. — La pudicizia... ufficiale — La soddisfazione sessuale nelle classi colte. IL MATRIMONIO — Il divorzio — La prostituzione — Le malattie veneree — Le nascite illegittime — La «custode di bambini» — Il Brefotrofio — Prostistuzione e criminalità — Conseguenze economico-sociali — Le soddisfazioni sessuali contro natura — L'onanismo — Il suicidio — La pazzia — I malanni sessuali e la classe dirigente — L'industria di scostumatezza — Che fa lo Stato? — Rimedii — Annotazioni e tabelle statistiche.

TAMBARO (Ignazio). **Le incompatibilità parlamentari.** Seconda edizione intieramente rifatta.—(N. 28). Un vol. in-16, pag. 175. . . . . 1 50

Introduzione — Teoria delle incompatibilità — I deputati impiegati — Le categorie — Le incompatibilità amministrative. — Le incompatibilità per affari — Incompatibilità diplomatiche ed ecclesiastiche — Legislazione straniera.

TANGORRA (Vincenzo). **La teoria degli eccessi di produzione in Giammaria Ortes.** — (N. 7). Un vol. in-8, pag. 32, L. 1 (esaurito).

TAROZZI (Giuseppe). **La vita e il pensiero di Luigi Ferri.** — (N. 6). Un volume in-8, pag. 22, L. 0,50 (esaurito).

TURIELLO (Pasquale). **Il secolo XIX.**—*Studio politico sociale.* — (N. 40) Un vol. in-16, pag. 187 2 —

Dedica — Al lettore — Mutazioni d'indirizzi durante il secolo XIX, e suoi pregiudizi via via smentiti dagli eventi — I maggiori progressi umani e nazionali del secolo — Regressi: occasioni crescenti di discordie commerciali e guerresche— Il parlamentarismo, come crebbe e decadde nel secolo scorso — Come si temprò e come si fiaccò la fibra politica italiana nel secolo XIX— Settentrionali e Meridionali — Il secolo della gara coloniale e l'Italia — Spiritualismo e materialismo nella vita del secolo passato.

VIRGILII (Filippo). **Il problema agricolo e l'avvenire sociale.** Seconda edizione.—(N. 9). Un vol. in-16 pag. 474 . . . . 4 —

Dedica — Introduzione — Gli Agenti della Produzione — L'azoto nell'economia agraria — Il sistema Solari nella pratica agricola — L'agricoltura sperimentale e i risultati ottenuti in Italia col sistema Solari — Gli effetti economici della nuova Agricoltura — CONCLUSIONE: La Crisi agraria e il mercato unico.

ZERBOGLIO (Adolfo). **Il Socialismo e le obiezioni più comuni.** — (N. 10). Un vol. in-16, pag. 200, L. 2 (esaurito).

In preparazione:

BONOMI (Ivanoe). **Le vie nuove del socialismo.**

NICEFORO (Alfredo). **Ricerche sui contadini.** *Contributo allo studio fisico ed economico delle classi povere.*

PANTALEONI (Maffeo). **Scritti varii d'economia.** Vol. II.

PREZIOSI (Giovanni). **L'emigrazione italiana.**

L'INDAGINE MODERNA

Questa raccolta comprenderà pubblicazioni riguardanti quanto di più recente abbia prodotto l'intelletto umano nel campo della conoscenza. Non opere speciali utili soltanto ai professionisti della scienza, non ricerche analitiche superflue pei profani, ma l'esposizione di queste, fatta da autori di fama mondiale: tale il programma de

L'INDAGINE MODERNA

Essa si presenta al pubblico coi seguenti nomi:

A. R. Wallace

Hugo De Vries

A. H. Haddon

Jaques Loeb

W. Windelband

Ernesto Lugaro

L'INDAGINE MODERNA

non è soltanto limitata agli argomenti puramente scientifici: il pensiero umano può rivelarsi sotto altri aspetti non meno importanti che dallo stretto carattere scientifico, sembrano in apparenza allontanarsi. La filosofia pura troverà quindi il suo posto naturale in questa raccolta; la critica, sia storica, sia letteraria, sia filosofica, contribuirà ad arricchirla di opere pregevoli italiane e straniere, che diffonderanno il pensiero contemporaneo nelle sue varie manifestazioni intellettuali, morali, estetiche, scientifiche, in questa nostra epoca che febbrilmente moltiplica le sue ricerche, tanto per il proprio maggior benessere materiale, quanto, e forse più, per un bisogno ideale di conoscere e di sapere.

L'INDAGINE MODERNA

N. 1. — **WALLACE** (Alfred Russel). — **Il posto dell' Uomo nell' Universo.** *Studi sui risultati delle ricerche scientifiche sulla unità o pluralità dei mondi.* Traduzione dall'inglese riveduta e preceduta da uno studio critico di GIACOMO LO FORTE.

Un vol. in-8°, pag. XXXVI-436, con illustrazioni, 3 tavole a colori riproducenti l'Universo stellare, e ritratto dell'Autore . . . . **L. 7,50**

ALFRED RUSSEL WALLACE e la sua ipotesi.— Prefazione dell'Autore.— L'Uomo e l'Universo *(Idee antiche)*.— L'Uomo e l'Universo *(Idee moderne)*. — La nuova astronomia. – Distribuzione delle stelle. – Distanza delle stelle.—Moto del sole attraverso lo spazio. — Unità ed evoluzione del sistema stellare. - Il numero delle stelle è infinito? — I nostri rapporti con la Via Lattea. — L'uniformità della materia e delle sue leggi nell'Universo stellare. — I caratteri essenziali dell' organismo vivente. — Le condizioni indispensabili alla vita organica. — La terra in rapporto con lo sviluppo e con la conservazione della vita. — La terra in relazione con la vita.—Condizioni atmosferiche. — La terra è il solo pianeta abitabile del sistema solare. — Le stelle posseggono sistemi planetari? — Sono esse utili a noi? — Stabilità del sistema stellare. – Importanza della nostra posizione centrale.

N. 2. — **LOEB** (Jacques). — **Fisiologia comparata del cervello e psicologia comparata.** Con aggiunte originali dell'Autore. — Traduzione del Prof. FEDERICO RAFFAELE, Ordinario di Anatomia e Fisiologia comparate nella R. Università di Palermo.

Un vol. in-8°, pag. XX-400, con 39 figure nel testo **L. 7,50**

Prefazione all'edizione italiana, del Prof. FEDERICO RAFFAELE — Prefazione all'edizione inglese.—Di alcuni fatti e concetti fondamentali concernenti la fisiologia comparata del sistema nervoso centrale. — Il sistema nervoso centrale delle Meduse—Il sistema nervoso centrale delle Ascidie e il suo significato nel meccanismo dei riflessi—Esperimenti sulle Attinie — Esperimenti sugli Echinodermi. — Esperimenti sui Vermi — Esperimenti sugli Artropodi — Esperimenti sui Molluschi — La teoria segmentale nei Vertebrati — Decussazione parziale delle fibre e dei movimenti coatti — Rapporti fra l'orientazione e la funzione di certi elementi dei gangli segmentali — Esperimenti sul cervelletto — Sulla teoria degli istinti animali. — Il sistema nervoso centrale e l'eredità. — Distribuzione della memoria associativa nel regno animale — Gli emisferi cerebrali e la memoria associativa — Localizzazioni anatomiche e psichiche — Disturbi della memoria associativa — Su alcuni punti di partenza per una futura analisi del meccanismo della memoria associativa—Aggiunte dell'Autore all'edizione italiana.

In preparazione:

DE VRIES (Hugo). **Specie e varietà.** *Loro origine mediante la mutazione.* Traduzione autorizzata del Prof. Federico Raffaele.

HADDON (A. H.). **Lo studio dell' Uomo.** *Introduzione all'etnologia.* Traduzione autorizzata del Prof. Andrea Giardina, Ordinario di Anatomia e Fisiologia comparate nella R. Università di Pavia. Con numerose illustrazioni e tavole.

LUGARO (Ernesto). **I problemi odierni della psichiatria.**

WINDELBAND (Guglielmo). **Manuale di storia della filosofia.** Traduzione autorizzata del Prof. Eugenio Zaniboni.

PICCOLA ENCICLOPEDIA DEL SECOLO XX

Questa raccolta, è specialmente curata con criteri moderni e pratici. Le scienze, la loro storia, le loro applicazioni, le nuove scoperte e le nuove industrie trovano posto in questa ***Piccola Enciclopedia,*** alla quale hanno collaborato e collaborano scrittori d'ingegno e di fama, e che non si rivolge soltanto ai profani, nè soltanto ai dotti, ma agli uni e agli altri, perchè la forma con cui i singoli lavori sono compilati se è quella più adatta alla volgarizzazione, non va per questo disgiunta dalla più scrupolosa esattezza scientifica.

BACCIONI (Gian Battista). **Igiene degli alimenti.—** *Libro per tutti.* — (N. 7). Un vol. in-16, pag. 235 1 50

Dell'alimentazione in generale — Perchè ci alimentiamo — Come ci dobbiamo alimentare — Le materie alimentari in particolare. La carne — Latte — Burro — Formaggio e grassi animali — Alimenti vegetali. Cereali — Pane — Leguminose— Fecole — Funghi — Frutta — Grassi — Bevande alimentari — Bevande alcooliche — Acqua.

. . . . *e* libro per tutti *è infatti questo del prof. Baccioni. — L'illustre igienista ci dà una trattazione di scienza pratica intorno alla alimentazione in generale e alle materie alimentari in particolare. — Ciascun argomento è trattato diffusamente con un eccellente criterio pratico e in una forma chiara e facile* . . . .

(Da **Il Momento** di Torino).

BRIGANTI (Gaetano). **La coltivazione della vite.—** *Nozioni generali della vite. — Ampelografia. — L'am-*

biente e la vite.—Ricostituzione dei vigneti con viti americane. — Moltiplicazione della vite. — (N. 10). Un vol. in-16, pag. 237, con 37 illustrazioni . . 1 50

Prefazione — Opere maggiormente consultate — NOZIONI GENERALI DELLA VITE — Cenni botanici sulla vite: *a)* organografia — *b)* elenco delle principali specie del genere *Vitis* — *c)* Fisiologia — Ampelografia — Influenza dell'ambiente sulla vegetazione e sul prodotto: *a)* Il terreno — *b)* Il clima — *c)* Regione — NOTE SULLA RICOSTITUZIONE DEI VIGNETI — Resistenza delle viti americane alla fillossera—Adattamento delle viti americane—Principali viti americane utilizzabili come porta-innesto: Riparia. Rupestris. Berlandieri — Ibridi usati come porta-innesto — Produttori diretti — MOLTIPLICAZIONE DELLA VITE — Moltiplicazione per seme — Moltiplicazione per talea — Propaggine — Innesto. *a)* Innesto legnoso. *b)* Innesto erbaceo.

BRIGANTI (Gaetano). **La coltivazione della vite.** — *Impianto del vigneto e lavori annuali di coltivazione— Avversità meteoriche— Malattie e nemici della vite. — Economia viticola. — Coltivazione delle uve da tavola* —(N. 11). Un vol. in-16, pagine 230, con 25 illustrazioni 1 50

IMPIANTO DEL VIGNETO E LAVORI ANNUALI DI COLTIVAZIONE — Impianto del vigneto — Potatura secca: corta, lunga, mista — Sostegni per le viti e palatura— Scortecciamento delle viti — Potatura verde — Concimazione — Lavori periodici del terreno — Irrigazione dei vigneti — AVVERSITÀ METEORICHE — ALTERAZIONI ORGANICHE — MALATTIE E NEMICI DELLE VITI — MEZZI PER PREVENIRLE E COMBATTERLE — Avversità meteoriche — Malattie ed alterazioni organiche — Malattie crittogamiche più comuni — Principali insetti nocivi— Economia viticola — Conti colturali di vigneti specializzati — id. id. id. non specializzati — Appendice — Coltivazione delle uve da tavola.

. . . . *Nei due volumetti è raccolto un tesoro di cognizioni, di osservazioni, di idee, che rappresenta il prodotto di un lungo studio e di una sana esperienza . . . .*

. . . . *ma se nel primo volume argomenti interessanti sono svolti con ricchezza di dati scientifici, nel secondo si raccoglie il più gran numero di osservazioni pratiche e di consigli utili ai viticultori . . . .*

(Dal **Giornale di Viticultura e di Enologia** di Avellino).

. . . . *Esso è insomma un manuale completo, teorico e pratico insieme, che gioverà moltissimo sia a coloro che si occupano delle questioni scientifiche relative alla vite, sia alla più numerosa classe di persone che hanno sopratutto di mira dei risultati pratici . . . .*

(Da **L'Ora** di Palermo).

. . . . *L'Egr. Prof. Briganti ha saputo fare un vero trattatello com-*

pleto di viticultura, frutto non di sola compilazione, ma in buona parte di esperienza personale e di illuminata raccolta di fatti . . . .

(Da **Il Coltivatore** di Casale Monferrato diretto da E. OTTAVI).

CAMPI (Cinzio). **Coltivazione delle piante erbacee.**—*Cereali e Foraggere* — (N. 12). Un vol. in-16, pag. 176, con 22 illustrazioni 1 50

Premesse — ***Cereali*** — Generalità — Classificazione — I cereali nell'organizzazione dell'azienda — Posto nell'avvicendamento — Limiti ed ottimo di vegetazione — Concimazioni — Lavorazione del terreno — Scelta della varietà — Frumento, segale, avena, orzo — Classificazioni — Semina — Consociazione — Cure di coltivazione — Raccolta — Frumento per paglia da cappelli — Cagioni nemiche in campagna — Granoturco, sorgo, miglio e panìco — Semina — Consociazione— Cure colturali utili — Pratiche colturali dannose — Raccolta — Cagioni nemiche in campagna — Riso — Condizioni ottime di vegetazione — Posto in rotazione — Concimazione — Lavori di preparazione e di coltivazione — Semina — Cura e governo delle acque — Raccolto e prodotto — Cagioni nemiche in campagna — Grano saraceno — Alcuni dati economici — ***Foraggere*** — Introduzione — Prati naturali di piano — Prati artificiali stabili — Prati stabili irrigui, iemali o marcite — Prati artificiali in rotazione — Prati artificiali propriamente detti — Erbai — Raccolta e conservazione dei foraggi — Silos — Cause nemiche delle coltivazioni foraggere.

. . . . È un ottimo libretto in cui si condensano con ordine e con chiarezza le principali e migliori nozioni per fare una cultura moderna e razionale del frumento, della segale, dell'avena e dell'orzo, del granturco e del riso e dei prati . . . .

(Da **Il Coltivatore** di Casale Monferrato diretto da E. OTTAVI).

CASTELLI (Mario). **Macchine agricole.**—(N. 4). Un vol. in-16, pag. 251, con 136 illustrazioni . . 2 —

Introduzione — Motori (animali, idraulici, termici, ad esplosione, a vento) — Macchine per la lavorazione del terreno (aratri, coltivatori, erpici, rulli, scarificatori) — Macchina per la semina, per lo spandimento dei concimi e per la sarchiatura (Seminatrici, spandiconcimi e sarchiatrici) — Macchine da raccolta dei prati, mietitrici per l'estrazione delle radici)—Macchine per la lavorazione dei prodotti (trebbiatrici, sgranatoi da granturco, pulitori, cernitori dei cereali, pressa-foraggi, macchine per la preparazione dei foraggi).

. . . . Il libro del Castelli è, per ora, l'ultima parola in fatto di meccanica agricola; in esso si trova tutto quanto ha con essa attinenza, convenientemente illustrato e spiegato. È il tipo perfetto del manuale pra*tico, poichè, dotato di parecchi indici, offre un mezzo facile di trovare l'argomento, la macchina, il sistema che per il momento più interessa. Non è semplicemente una descrizione di macchine e del loro funzionamento, chè ognuna di esse è messa in relazione con l'ufficio che essa compie nell'economia dei campi . . . .*

(Dal **Bollettino del Comizio Agrario** di Casale Monferrato).

. . . . La chiarezza, la concisione ed i dati che vi si trovano, rendono questo manuale di un'incontestata utilità e noi con piacere non esitiamo a raccomandarlo ai nostri cortesi lettori. . . .

(Da **L'eco degli ingegneri e periti agrimensori** di Pescia).

. . . . Questo libro è quanto di meglio e di più recente si conosca in fatto di meccanica agraria: è il tipo perfetto del manuale pratico. . . .

(Da **La Puglia agricola** di Bari).

CORBINO (Orso Mario). I sistemi di illuminazione. — (N. 2). Un vol. in-16, pag. 230 . . . . . 1 50

Preliminari. — Nozioni di fotometria. — L'emissione della luce. — La fiamma. Le candele. Le lampade a olio ed a petrolio. — Produzione e distribuzione del gas illuminante. — Illuminazione a gas e a incandescenza. — Illuminazione a incandescenza — Illuminazione ad acetilene — Generalità sulle correnti elettriche — Produzione della corrente elettrica — Apparecchi per le misure elettriche — Distribuzione dell'energia elettrica — Le lampade ad incandescenza — La lampada ad arco — Illuminazione elettrica pubblica e privata e suo costo — Confronto dei varii sistemi di illuminazione — La lampada dell'avvenire.

. . . . opere pregevolissime si hanno, destinate a scienziati e tecnici, che trattano l'argomento in modo completo da vario punto di vista. Invece ben poco o nulla si aveva per il pubblico intelligente che ha tanto interesse di conoscere in rapida sintesi quello che è necessario alla vita di ogni giorno . . . .

DE SANCTIS (Sante). La mimica del pensiero. — *Studi e ricerche.* — (N. 9). Un vol. in-16, pag. 209, con 41 illustrazioni . . . . 2 —

Lo studio della mimica del pensiero — Mimica emotiva e mimica intellettuale. Gli ordegni muscolari e nervosi della mimica intellettuale — La mimica intellettuale negli animali — La mimica intellettuale nei bambini e nei vecchi — La mimica intellettuale nell'uomo adulto — La mimica del pensiero concentrato e del pensiero diffuso — I modificatori della mimica intellettuale (razza — sesso — abitudini — età — malattie e degenerazioni). Epilogo.

. . . . Sante De Sanctis espone con forma piana e con ordine dilettevole le ricerche sue ed altrui — e sue sono in gran parte — sulla mimica intellettuale degli animali e dell'uomo, nei sessi e nell'età varie, sui gesti del volto e del corpo che esprimono l'attenzione. . . .

(Da **Il Marzocco,** Firenze, 4 settembre 1904).

. . . . e la questione non potrebbe essere più interessante specialmente perchè gli studii scientifici si sono in particolar modo versati intorno alla mimica delle emozioni che è senza dubbio più vivace ed appariscente. . . .

(Da **Il Pungolo** di Napoli).

... In tal modo, oltre la parte tecnica, si ha sotto gli occhi il costo dei varii impianti, sia generale che chilometrico, la qualcosa permette a coloro che si accingono allo studio di un progetto di trazione elettrica di esaminare tutti i dati relativi, economici e tecnici insieme.

(Da **La Tribuna** di Roma)

Questo piccolo volume giunge opportunamente in un periodo in cui s'agita la grave questione se convenga oppure no la sostituzione della trazione elettrica a quella a vapore....

.... Per la ricchezza di notizie in materia di trazione, per i numerosi dati pratici, questo volume, sebbene di modeste dimensioni, sarà indubbiamente apprezzato e consultato da chiunque s'interessa di cose di elettrotecnica.

L'esposizione è chiara; l'edizione è nitida ed il libro è ricco di molte e belle figure.

(Da **Il Nuovo Cimento** di Pisa).

.... servirà a mostrare le principali applicazioni dell'elettrotecnica alla trazione, le difficoltà a risolvere le diversi questioni in questa importantissima industria, e le ragioni che militano pro e contro la sostituzione di essa alla trazione a vapore.

Nel libro sono riportati numerosi esempj di linee esistenti, importanti sotto varii aspetti, dai quali si possono desumere non solo le difficoltà risolte ma anche la grande differenza fra i sistemi ed i particolari adottati.

(Da **L'Industria** di Milano)

.... D'altro canto questo compendioso lavoro rappresenta un vero vademecum *dell'elettrotecnico, con questo di speciale, che è il più recente e il più completo, quello insomma che può risolvere qualsiasi ostacolo o difficoltà che improvvisamente sorga....*

(Dalla **Rivista Scientifico-Industriale** di Firenze)

PORRO (Francesco). **L'evoluzione cosmica.**—(N. 5). Un vol. in-16, pag. 191. . . . . 1 50

Con forma accessibile a tutte le persone colte, l'A. espone in qual modo la dottrina dell'evoluzione si estende dal regno del mondo organico a quello dell'universo, dagli esseri viventi nel nostro pianeta agli astri roteanti nell'etere infinito. Una dopo l'altra egli riferisce le grandi ipotesi cosmogoniche, dà conto dei più moderni risultati, ai quali è pervenuta la scienza astronomica, traendone argomento per discutere il grande enimma delle origini e dei fini dell'universo.

(Dal **Corriere della Sera** di Milano).

. . . . Un ottimo esempio di questa tolleranza veramente liberale dà Fr. Porro nei suoi saggi su L'evoluzione cosmica, *dai quali difficil-*

mente potrebbe imparare alcunchè di nuovo chi fosse invecchiato negli studî astronomici e biologici, ma che, son certo, è quanto di meglio possa oggi consigliarsi a chi vuole, senza molta fatica, apprendere ciò che v'è di essenziale nelle moderne teorie sulla formazione dell'Universo e sull'origine della vita. . . .

(Da **Il Marzocco** di Firenze).

RAFFAELE (Federico). **L'Individuo e la Specie.** —(N. 14). Un vol. in-16, pag. 275, con 10 illustr. 2 —

Le unità biologiche — Somiglianze e differenze e modo di apprezzarle — La matematica e le aringhe — La variabilità del chimismo nell'individuo e nella specie — La funzione dell'individuo nella specie — La coppia — Il polimorfismo — Le colonie — Gli animali sociali — La forza del numero — Le madri previdenti — Conchiusione e apologia — Bibliografia.

. . . . è un dotto e serrato libro che, come tutti i precedenti, riesce meravigliosamente al suo scopo, nell'unione sapiente dell'ineccepibile moderno scientifico con la chiarezza e la sommarietà della divulgazione....

(Da **Il Piemonte** di Torino).

Il titolo del volume dice l'importanza dell'argomento. L'A. di esso professore di anatomia e fisiologia comparate all'Università di Palermo, ci ha già dato tanti altri apprezzatissimi lavori del genere: in questo discute a fondo, sotto tutti gli aspetti, cosa si debba intendere veramente per unità biologica. . . . . È un libro che dovrebbe esser letto da ogni persona colta.

(Da **L'Università italiana** di Bologna).

. . . . Sono discussioni magnifiche queste, alle quali i cultori di biologia si appassionano. Quando poi il volume è scritto da uno scienziato, il quale, come il Prof. Raffaele, sa porgere la scienza con eleganza di forma e con contenuto preciso, queste discussioni diventano un vero godimento del pensiero....

. . . . Questo volumetto scopre al lettore che desidera istruirsi, sia pur profano di scienze naturali, orizzonti nuovi. Esso fornisce una quantità di nozioni diverse, non solo ignorate, ma addirittura non sospettate, e porta quindi un contributo efficacissimo alla cultura.

(Da **La Tribuna** di Roma).

RIBOT (Teodulo). **Le malattie della memoria.** Traduzione, autorizzata dall'Autore, del Dr. LEONARDO TUCCI. — (N. 15). Un vol. in-16, pag. 184 . . 2 —

Biologia della memoria — Le amnesie generali — Le amnesie parziali — Le esaltazioni della memoria — Conclusione.

È questo del sommo scienziato francese un importantissimo studio psicologico delle malattie della memoria. — La memoria è stata sin qui oggetto di larghe ricerche per parte dei psicologi ma dal punto di vista patologico nessuno l'aveva studiata.

Ricco di esempj e facile nella forma il libro si legge con piacere e con grande interesse non solo dallo scienziato ma anche da tutte le persone colte.

.... Di un altro volume dell'illustre direttore della « Revue Philosophique » ci sta ora sotto gli occhi una buona traduzione nella lingua nostra: quello in cui il Ribot studiò le malattie della memoria....

.... queste le conclusioni dell'importante opera del Ribot; la quale, per la forma semplice e chiara in cui la materia è esposta, riuscirà d'interesse, non soltanto per gli studiosi, ma anche per tutte le persone colte.

(Da **Minerva** di Roma).

RIBOT (Teodulo). **Le malattie della personalità.** Traduzione, autorizzata dall'Autore, del Dr. LEONARDO TUCCI.—(N. 17). Un vol. in-16, pag. 221 . 2 —

Prefazione — Introduzione — Le perturbazioni organiche — Le perturbazioni affettive — Le perturbazioni intellettuali — La dissoluzione della personalità — Conclusione.

Con limpidezza eccezionale questo volume tratta la questione dei perturbamenti, disordini ed alterazioni della personalità.

Fatta la rassegna di tutti i casi in cui la personalità, l'unità dell'Io è in grado qualsiasi intaccata da alterazioni parziali, lievi e fugaci fino alle metamorfosi complete, l'illustre psicologo francese viene a conclusioni geniali ed originali.

TERRACCIANO (Achille). **Lo sviluppo delle forme ed i rapporti sociali nella vita delle piante.**—(N. 6). Un vol. in-16, pag. 226, con 62 illustrazioni 1 50

L'utilità dei vegetali per l'uomo e per gli altri animali — Sviluppo delle piante tallofite e degli animali inferiori — Le tallofite — La struttura interna delle Cormofile — Le Briofile — Gli organi vegetativi della Pteridofile e delle Fanerogame — Conclusione e riepilogo.

. . . . Il libro espone, genialmente, senza astruseria, il concetto dell'evoluzione nel mondo vegetale e i problemi profondi che ad esso si innestano, onde, dato l'interesse della sostanza ed i criteri adoperati, il libro è veramente utile. . . . .

(Dalla **Rivista d'Italia**).

VIRGILII (Filippo). **La Statistica nella odierna evoluzione sociale.**—(N. 3). Un vol. in-16, pag. 240 1 50

Le conquiste della Statistica — Lo sviluppo storico della Statistica in Italia— Il quarto censimento italiano — Statistica e sociologia.

. . . . non vuol essere nè un trattato di Statistica, nè una monografia su di un argomento speciale, ma si propone di additare al pubblico il contenuto essenziale di questa dottrina e di formularne i più importanti problemi, in modo da far acquistare la cognizione esatta, per quanto sommaria dei limiti e delle applicazioni sue.

(Dalla *Prefazione*).

WUNDT (Guglielmo). **Ipnotismo e suggestione.** *Studio critico.*—Traduzione, autorizzata dall'Autore, del Dr. Leonardo Tucci. — (N. 18). Un vol. in-16, pag. 176 . . . . 2 —

Introduzione — Fenomeni dell' ipnosi — Fisiologia e psicologia dell' ipnosi e della suggestione — La suggestione come metodo sperimentale — Valore pratico dell'ipnotismo.

BIBLIOTECA RARA

Iniziata al principio del nuovo secolo, la *Biblioteca Rara* di opere storiche, economiche e letterarie si propose di esumare dall' immeritato oblìo, e ripubblicare a prezzo accessibile ai lettori modestia di fortuna, scritti pregevoli di illustri italiani della prima metà del secolo XIX, già noti un tempo, oggi *mal conosciuti o irreperibili* insieme con altri veramente *rari*, e alcuni *tuttora inediti*. Si propose inoltre di ripubblicare *documenti e memorie* di avvenimenti italiani, che, editi all'estero in tempi di persecuzione, rimasero *ignorati* alle generazioni seguitesi dopo il 1860.

I lavori che sono stati e che saranno man mano esumati, sono di quelli che ebbero già la loro celebrità, e dei quali dura sempre memoria nelle nostre generazioni, che li conoscono per il titolo e per il tempo in cui vennero per la prima volta alla luce. I nomi illustri del FERRARI, del CATTANEO, del GIOIA, del PISACANE, del MACCHI, del MARIO, del BROFFERIO, ecc. ecc., arricchiscono questa preziosa raccolta, la cui importanza, oltre che nel valore intrinseco delle opere risiede anche, e specialmente, nell'inestimabile valore storico di esse.

BROFFERIO (Angelo). **I primi quindici anni del Regno di Carlo Alberto** *(dal 1831 al 1846)*.—(N. 5).
Un vol. in-16, pag. 172, con ritratto. . . . 1 20

Il volume che ristampiamo sotto il titolo « I primi 15 anni del Regno di Carlo Alberto », forma il III dei 5 volumi della « Storia del Piemonte » dal 1814 ai giorni nostri che l'A. pubblicò a Torino (Tip. Fer-

rero Franco) nel 1850, quand'erano quasi tutti ancor vivi gli autori e i testimoni degli avvenimenti da lui narrati . . . . . .

. . . . . . Egli commove mentre anatomizza; mentre ricorda, scolpisce. Se tutti i grandi baccalari della storia ad usum delphini *non citano mai queste pagine del Brofferio, e quantunque come contemporaneo, testimone o partecipe degli avvenimenti, e per l'ingegno, la popolarità e il carattere indipendente, e la vita onorata dovrebbe essere la più consultata delle fonti — non è senza una buona ragione. La leggenda, la sofisticazione, l'adulazione postuma come si sosterrebbero davanti a quelle pagine?*

Era dunque troppo giusto che la nostra « Biblioteca Rara » le riesumasse offrendole ai giovani studiosi che troveranno questa Storia interessante e drammatica assai più di molti romanzi. Essa è infatti un dramma psicologico e sociale, tratteggiato da un artista di prim'ordine.

(dalla *Prefazione).*

CATTANEO (Carlo) (v. *Gioia M.*). **Sul libero Commercio dei grani,** ecc.

FERRARI (Giuseppe). **La rivoluzione e i rivoluzionari in Italia** *(dal 1796 al 1844).* —(N. 1). Un vol. in-16, pag. 161, con ritratto 1 20

Prefazione — Chi era Giuseppe Ferrari. (CARLO CATTANEO): MOVIMENTO POLITICO — Le repubbliche del Direttorio — Napoleone ed il regno d'Italia — L'Austria e la ristorazione — La Corte di Roma e la rivoluzione di Luglio: GLI SCRITTORI POLITICI — L'opposizione del 1814 — Coraccini, Guicciardi (Armarobi), Ugo Foscolo. Il « Conciliatore » di Milano — Gli Storici politici di Napoli e del Piemonte — La letteratura italiana dopo il 1880 — Mazzini, il Conte Balbo, l' Anonimo toscano (Giusti), Niccolini — Della condizione attuale (1844). Indice alfabetico dei nomi e delle cose notevoli.

Iniziando col nome di Giuseppe Ferrari questa Biblioteca, noi proviamo l'orgogliosa soddisfazione di chi sa di compiere una giusta rivendicazione; e pure riservandoci in altro volume di dare maggiori notizie della vita e delle opere del grande filosofo milanese, ci arride la speranza che già questo primo richiamo scuota l'obliosa noncuranza dei suoi concittadini . . . .

. . . . « Più che altrove sono a notarsi in questi due scritti la cal- « ma, la temperanza e la giustezza delle idee. Sembra che alle ragioni « già accennate si aggiunga nell'animo del Ferrari il sentimento e la co- « scienza dei giorni solenni, che si avvicinano, e il desiderio di acquietare « le apprensioni e togliere gl'ingiusti pregiudizi di molti contro la causa « della libertà e dell'Italia ». Così parlava l'illustre Prof. CARLO CANTONI *toccando degli articoli. « La rivoluzione e i rivoluzionarii in Italia*

(ond'è formato il presente volume) nella commemorazione da lui pronunciata, per incarico dei Colleghi all'Istituto Lombardo, nella tornata del 17 Novembre 1877.

(Dalla *Prefazione* di **Arcangelo Ghisleri**).

GIOIA (Melchiorre). **Teoria civile e penale del divorzio,** ossia: *Necessità, cause, nuova maniera di organizzarlo* (opera edita nel 1803). — (N. 6). Un vol. in-16, pag. 153, con ritratto 1 20

Cento anni dopo — Prefazione dell'autore: NECESSITÀ DEL DIVORZIO — Riflessioni generali — Il divorzio considerato relativamente agli sposi — Del divorzio relativamente alla Società — Continuazione dello stesso argomento — Del divorzio considerato relativamente alla prole — Risposta ad un'obiezione speciale — CAUSE DI DIVORZIO — Cause fisiche — Cause morali — Dei matrimoni anteriori alla legge del divorzio.

Il libro è vivace e, per quei tempi, assai ardito. Lo stile, come è felice caratteristica del Gioia, molto disadorno, ma preciso, semplice e straordinariamente chiaro. La filosofia che impronta le argomentazioni, un po' materiale come quella che rifletteva il sensismo e l'utilitarismo empirici allora di moda, ha però una singolare forza persuasiva. Quella che è tratta dal buon senso e dal giudizio della comune opinione. E siccome l'umanità si dibatte ogni giorno fra gli antichi errori, ed ogni giorno dimentica ciò che fu detto l'avanti ieri dagli studiosi e dai pensatori, la lettura di questo libro, fra l'odierno dibattito pro e contro il divorzio, diventa oltrechè istruttivo, assai dilettevole per il sapore polemico onde manifesta tutta la sua freschezza e modernità.

(Dalla *Prefazione*).

— **Sul caro dei viveri e sul libero commercio dei grani,** aggiuntovi: **L'agricoltura inglese paragonata alla nostra,** di CARLO CATTANEO. — (N. 2). Un vol. in-16, pag. 153, con ritratto. . . . 1 20

Epigrafe (di MAFFEO PANTALEONI) — Chi era Melchiorre Gioia: SUL CARO DEI VIVERI E SUL LIBERO COMMERCIO DEI GRANI — Principio generale sulla libertà del commercio e applicazione alla circolazione del grano. Della notificazione dei grani — Del calmiere o meta — Degli ammassi di grano — Se i governi debbano comprare grano estero o interno a servizio del pubblico — Rimedi al caro prezzo del vitto — L'AGRICOLTURA INGLESE PARAGONATA ALLA NOSTRA.

. . . . onde lo stesso Romagnosi scrive: « Bello è il vedere con « quale gradazione la mente di lui siasi ampliata ed a mano a mano abbia « prodotti que' lavori che formano precipuamente la sua celebrità ed i « suoi titoli di riconoscenza dai posteri. Con lo scritto suo « Sul commercio « dei commestibili, a caro prezzo del vitto « pubblicato fin dall'anno 1802

« *paragonando il secolo finito con quello che incominciava, e segnando la* « *crescente prosperità come causa del crescente prezzo delle cose, unì le* « *viste dell'economista con quelle dello statista e del filosofo, ed annunziò* « *così il preludio della grand'opera del* « *Nuovo prospetto delle scienze* « *economiche* » *che dodici anni dopo fu da lui pubblicata. . . . .* »

(Dalla *Prefazione).*

MACCHI (Mauro). **Le contraddizioni di Vincenzo Gioberti.** — *Osservazioni critiche* — aggiuntovi: **Gioberti filosofo,** *giudicato* da GIUSEPPE FERRARI. — (N. 3). Un vol. in-16, pag. 183, con ritratto . 1 20

Chi era Mauro Macchi — Gioberti filosofo giudicato da Giuseppe Ferrari — V. Gioberti, la sua fama e la sua politica — Gioberti cattolico — La Monarchia e la Repubblica nelle opere di Gioberti e Pio IX — Gioberti e Carlo Alberto — Conclusione.

. . . ho pensato di contrapporre Gioberti a Gioberti, ossia di mettere a rapporto i suoi disparati giudizi nelle controversie medesime. — E però ebbi cura di citarlo letteralmente . . . . .

. . . . . Questo non è un libro di partito, e quindi non è destinato a propugnare piuttosto l'una che l'altra dottrina. Solo scopo per cui venne dettato è di provare oltre all'enorme contraddizione dei principii, che i fatti da Gioberti asseriti a danno del prossimo, o sono insussistenti, o tornano a somma lode di quei medesimi ch' egli avrebbe voluto vituperare . . . . .

(Dalla *Prefazione*).

MARIO (Alberto). **La canzone di Garibaldi del D'Annunzio documentata.** — (N. 7). Un vol. in-16, pag. 164, con ritratto 1 20

Da Quarto a Palermo — Dopo la battaglia di Volturno — Avvicinavasi il Re— L'incontro presso Teano — Come l' Eroe torna a Caprera — Aspromonte — La fuga da Caprera — Mentana — L'ultimo Sogno — APPENDICI: *a)* Documento per la storia dei Mille — *b)* L'incontro del Re presso Teano — *c)* Dalla Storia d'Italia di Luigi Anelli — *d)* Prima del Plebiscito a Napoli — *e)* Il retroscena di Aspromonte.

. . . . . Ora stupiranno forse i critici della Canzone, i quali avevano supposto fossero artificio da fantasia certe particolarità dei luoghi, dell'ora, delle circostanze e degli atteggiamenti dell' Eroe, stupiranno forse di trovarne qui le fonti storiche a cui il poeta s' attende con fedeltà di ossequio quasi religiosa . . . . .

(Dalla *Prefazione* di **Arcangelo Ghisleri).**

PECCHIO (Giuseppe). **Storia della economia pub-**

blica in Italia, ossia *Epilogo critico degli economisti italiani,* preceduto da un'introduzione.—*Parte I: Dallo Scaruffi al Beccaria.* — (N. 8). Un volume in-16, pag. 141 . . . . 1 20

Cenni biografici — Prefazione dell'autore — Introduzione storica — Gaspare Scaruffi — Bernardo Davanzati — Antonio Serra — Gian Donati Turboli — Germiniano Montanari — Salustio Antonio Bandini — Antonio Broggia — Ferdinando Galiani — Gerolamo Belloni — Gian Francesco Pagnini — Pompeo Neri — Gian Rinaldo Carlì — Antonio Genovesi — Francesco Algarotti — Antonio Zanon — Cesare Beccaria.

. . . . In questa operetta pubblicata nel 1829, il Pecchio prendendo a base la raccolta degli economisti italiani, pubblicata dal Custodi in 50 volumi, delineò in forma lucida e piacevole « un epilogo storico critico degli economisti italiani » dal 1582 al 1804, raccontando di ciascuno la vita, esponendo le dottrine, dimostrando per la via di opportuni confronti, specialmente con le teorie economiche della scuola inglese, il contributo da ciascun di essi arrecato alla scienza. Questa prima parte va dallo Scaruffi al Beccaria e si apre con una bella introduzione storica, la quale è tutta una simpatica battaglia per la libertà e per la scienza.— Nell'insieme il libro è notevolissimo per solidità e freschezza di cultura, per spigliatezza e giovanilità di forma; è un vero modello di libro destinato alla divulgazione dei risultati di ricerche scientifiche . . . .

(Dalla *Prefazione*).

PISACANE (Carlo). **Come ordinare la nazione armata,** ossia: *Ordinamento e costituzione delle milizie italiane,* con prefazione di G. RENZI. — (N. 4). Un vol. in 16, pag. 157, con ritratto . . . 1 20

Introduzione e biografia — Vicende storiche dell'arte della guerra — Gli eserciti permanenti — Forza, ripartizione e proporzione fra le diverse armi — L'educazione militare nell'ordinamento sociale e democratico — Della giustizia militare e conclusione.

. . . . Carlo Pisacane fu il primo socialista italiano; e fu non già un precursore del socialismo ma un socialista completo, nel senso moderno del vocabolo, perchè del socialismo, quale noi lo vediamo oggidì, comprese e sviluppò le idee fondamentali . . . . . Quando si leggeranno in questo volume delle idee, le quali, sebbene sostenute da dimostrazioni rigorose e da fatti palpabili, pure sono in contraddizione con le idee comunemente accettate, quando si leggeranno queste idee, non si sorrida come di facile utopia fiorita nel cervello d'un sovversivo spoglio di cognizioni precise e speciali. Si rifletta invece che queste idee, oltre che imporsi all'attenzione per il rigore del ragionamento e l'evidenza dei fatti

con cui sono sostenuti, derivano anche un'importanza particolare dal fatto che colui che le enunciava e le riteneva attuabili e buone era precisamente un tecnico, usciva da un collegio militare ed era ufficiale di un'arma dotta, del Genio.

(Dalla *Prefazione*).

TRIULZI BELGIOIOSO (Cristina). **L'Italia e la rivoluzione italiana** (dalla *Revue des Deux Mondes*, 1848) aggiuntovi: *Gli ultimi tristissimi fatti di Milano (narrati dal Comitato di Pubblica Difesa)*, con documenti. — (N. 9). Un vol. in-16, pag. 184. 1 20

Breve prefazione di Arcangelo Ghisleri — La rivoluzione milanese — Il governo provvisorio — I corpi ausiliari — La guerra in Lombardia — Assedio e capitolazione di Milano — Gli ultimi tristi fatti di Milano narrati dal Comitato di Pubblica Difesa (Restelli, Maestri) — Documenti.

Riproducemmo il testo di quella traduzione fedele, conservandone lo stile perchè esso medesimo ha un poco il sapore del tempo. Strana coincidenza! Cattaneo e la Belgioioso, senza sapere l'un dell'altra, dettavano in quel medesimo lugubre settembre da Parigi i loro scritti memorabili, mossi dal medesimo intento, di rischiarare le tenebre dentro a cui giaceva avvolta, per la mente dei forestieri la fedeltà dei fatti nostri — Entrambi narrano di cose vedute, ben note, parlano di persone viventi, hanno l'accento commosso di chi fu partecipe degli avvenimenti, ma si offrono con coraggiosa veracità, senza nulla sottacere o nascondere, quali testimoni alla storia imparziale dei venturi. Lo scritto della Belgioioso fra cotanto rifiorire di pubblicazioni erudite e di « contributi » alla storia del nostro Risogimento, era un documento necessario, che fino ad ora mancava.

(Dalla *Prefazione*).

CESAREO G. A.

FRANCESCA DA RIMINI

Tragedia in versi in cinque atti

Elegante edizione su carta a mano, in-8° pagg. 202 — **L. 4.**

LE CONSOLATRICI ~ VERSI

Elegante edizione su carta a mano, in-8° pagg. 210 — **L. 4.**

— **La vita di Giacomo Leopardi,** in-16° pagg. 205, con ritratto in eliotipia del Leopardi L. 1 50

D'OVIDIO FR. — **Studii sulla Divina Commedia,** in-8° pagg. 608. L. 5 —

— **Rimpianti.** *Saggi critici,* in-8° pagg. 464. » 4 —

FINZI GIUS. — **Dizionario di citazioni latine ed italiane.**

(Citazioni latine — Detti proverbiali — Frasi e versi curiosi — Versi leonini e salernitani — Detti e motti storici e allegorici — Massime di diritto romano. — Citazioni italiane).

Elegante edizione in-8 pagg. XVI-970. L. 8 —
— rilegato in tela e oro » 10 —

RAGUSA MOLETI G.

GIOSUE CARDUCCI

COMMEMORAZIONE

Un volume in 16, pagg. 72 — **Lire UNA.**